



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

КАФЕДРА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

Конспект лекций

по дисциплине

«Теоретическая механика»

Ростов-на-Дону

2025

Автор-составитель: к.т.н. Недина Евгения Александровна

Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая механика». ДГТУ, г. Ростов-на-Дону, 2025 г.

В конспекте лекций последовательно изложены основы теоретической механики. Материал разбит на лекции, каждая из которых содержит ключевые слова и теоретический материал. Для удобства использования конспект лекций снабжен содержанием, именным указателем и списком использованной литературы.

В основу конспекта легло учебное пособие:

Волков А.Э., Чеканина Е.А. Основы теоретической механики. – Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2022. – 192 с.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 Агроинженерия.

Ответственный за выпуск:

зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» (руководитель структурного подразделения, ответственного за реализацию ОПОП): к.ф.-м.н., доцент Панфилов И.А.

© Издательский центр ДГТУ, 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. СТАТИКА.....	5
Лекция 1. Основные понятия и определения теоретической механики. Аксиомы механики.....	5
1.1. Теоретическая механика: предмет изучения, допущения, разделы.....	5
1.2. Основные понятия.....	6
1.3. Аксиомы механики	10
1.4. Главный вектор и главный момент системы сил. Эквивалентные системы сил. Равнодействующая	12
1.5. Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил	14
Лекция 2. Связи и их реакции. Распределенная нагрузка. Трение.....	16
2.1. Связи и их реакции	16
2.2. Распределенная нагрузка	19
2.3. Трение	20
Лекция 3. Условия равновесия твердого тела. Равновесие сочлененных систем	24
3.1. Две основные задачи статики	24
3.2. Условия равновесия твердого тела	24
3.3. Частные случаи равновесия твердого тела	26
3.4. Равновесие сочлененных систем	29
Лекция 4. Приведение системы сил к центру. Центр тяжести	33
4.1. Приведение системы сил к центру	33
4.2. Центр тяжести	37
2. КИНЕМАТИКА.....	43
Лекция 5. Кинематика точки	43
5.1. Способы задания движения точки.....	43
5.2. Скорость точки при различных способах задания движения	44
5.3. Ускорение точки при различных способах задания движения	46
Лекция 6. Поступательное и вращательное движения твердого тела.....	49
6.1. Поступательное движение твердого тела	49
6.2. Вращательное движение твердого тела	50
Лекция 7. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела.....	57
7.1. Уравнения плоскопараллельного движения твердого тел	57
7.2. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения.....	59
7.3. Определение скоростей точек плоской фигуры.....	60
7.4. Определение ускорений точек плоской фигуры	64
Лекция 8. Сферическое движение твердого тела. Общий случай движения твердого тела.....	66
8.1. Сферическое движение твердого тела	66
8.2. Теорема об оси конечного поворота. Мгновенная ось вращения.....	67
8.3. Скорости и ускорения точек твердого тела, совершающего сферическое движение.....	68
8.4. Общий случай движения твердого тела	70
Лекция 9. Сложное движение точки	72
9.1. Относительное, переносное и абсолютное движения точки.....	72
9.2. Абсолютная и относительная производные вектора по времени	74
9.3. Теорема о сложении скоростей точки	76
9.4. Теорема о сложении ускорений точки (теорема Кориолиса).....	78
9.5. Вычисление и построение кориолисова ускорения	80
3. ДИНАМИКА	82
Лекция 10. Аксиомы динамики. Динамика материальной точки	82
10.1. Законы Галилея – Ньютона (аксиомы динамики).....	82
10.2. Динамика материальной точки	84
10.3. Динамика относительного движения точки	88
Лекция 11. Динамика механической системы. Геометрия масс.....	92
11.1. Понятие механической системы.....	92
11.2. Центр масс системы.....	92
11.3. Основное уравнение динамики точек механической системы	94
11.4. Теорема о движении центра масс механической системы	94
11.5. Законы сохранения движения центра масс.....	95
11.6. Осевой момент инерции тела.....	96
11.7. Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса – Штейнера	97
11.8. Примеры вычисления осевых моментов инерции некоторых однородных тел.....	98
11.9. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции.....	100
Лекция 12. Меры механического движения. Меры действия сил.....	102
12.1. Меры механического движения.....	102

12.2. Меры действия сил	108
Лекция 13. Общие теоремы динамики	113
13.1. Теорема об изменении количества движения	113
13.2. Теорема об изменении кинетического момента	114
13.3. Теорема об изменении кинетической энергии	116
Лекция 14. Введение в аналитическую механику. Принцип возможных перемещений	123
14.1. Связи в аналитической механике и их классификация	123
14.2. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы	127
14.3. Принцип возможных перемещений	130
Лекция 15. Уравнения Лагранжа 2-го рода	134
15.1. Обобщенные координаты и обобщенные скорости	134
15.2. Обобщенные силы	135
15.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода	137
15.4. Уравнения Лагранжа 2-го рода для случая потенциальных сил	142
Лекция 16. Принцип Даламбера. Общее уравнение динамики	144
16.1. Принцип Даламбера	144
16.2. Общее уравнение динамики	150
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	150
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	153

1. СТАТИКА

Лекция 1. Основные понятия и определения теоретической механики. Аксиомы механики

Предмет изучения теоретической механики. Допущения и абстракции, принятые в теоретической механике. Разделы теоретической механики. Сила. Проекция силы на ось и плоскость. Инертность и масса тела. Момент силы относительно точки и оси. Пара сил и ее момент. Аксиомы механики. Главный вектор системы сил. Главный момент системы сил. Эквивалентные системы сил. Равнодействующая системы сил. Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил.

1.1. Теоретическая механика: предмет изучения, допущения, разделы

1.1.1. Предмет изучения теоретической механики

Теоретическая механика – это наука об общих законах механического движения и механических взаимодействиях материальных тел друг с другом.

Механическое движение представляет собой изменение с течением времени пространственного расположения тел относительно друг друга. Поскольку состояние равновесия (покоя) тела есть частный случай механического движения, то в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия (покоя) материальных тел.

Механическое взаимодействие – это взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить механическое движение этих тел (или их частей). Примерами механических взаимодействий могут служить давление одного тела на другое и взаимное притяжение тел.

1.1.2. Допущения и абстракции, принятые в теоретической механике

В теоретической механике рассматриваются следующие модели материальных тел, представляющих собой ту или иную степень абстракции по сравнению с реальными телами: материальная точка, абсолютно твердое тело и механическая система.

Материальная точка – это тело, лишенное протяженности, но обладающее массой. Одно и то же реальное тело в зависимости от постановки задачи может рассматриваться либо как материальная точка, либо как тело, размеры которого необходимо учесть. В дальнейшем для краткости материальная точка может именоваться просто точкой.

Абсолютно твердое тело – это совокупность материальных точек, расстояния между которыми сохраняются неизменными во все время движения тела при действии любых сил. Модель используется в случаях, когда деформациями (изменениями размеров и формы) можно пренебречь из-за их малости. Абсолютное твердое тело представляет собой неизменяемую систему материальных точек. В дальнейшем для краткости абсолютно твердое тело может именоваться твердым телом или просто телом.

Механическая система – это совокупность материальных точек или тел, связанных между собой силами взаимодействия. Твердое тело – частный случай механической системы.

Все движения, в том числе и механические, происходят в пространстве и времени. Пространство, время и движение представляют собой не зависящие от человеческого сознания формы существования материи. *Пространство в механике* – это абсолютно неизменяемая, безгранично во все стороны распространяющаяся система точек, аналогичная по схеме абсолютно твердому телу.

Система координат, связанная с каким-либо объектом, называется *системой отсчета*. Системы отсчета могут быть либо неподвижными по отношению к одной *основной системе* (принимаемой условно за неподвижную), либо двигаться по отношению к ней. Всякое механическое движение тел или их частей происходит по отношению к некоторой системе отсчета, т.е. является относительным.

1.1.3. Разделы теоретической механики

Курс теоретической механики делится на три раздела: статика, кинематика и динамика.

Статика – это учение о силах и о равновесии тел под действием приложенных сил.

Кинематика – это учение о движении тел в отрыве от причин, вызывающих это движение.

Динамика – это раздел, в котором изучается движение материальных тел с учетом взаимодействий между ними.

1.2. Основные понятия

1.2.1. Сила. Проекция силы на ось и плоскость

Основной мерой механического воздействия одного тела на другое является *сила*. Это понятие позволяет выделить некоторый объект для изучения, отделить его от других тел, заменив их действие силами. Сила как векторная величина характеризуется *модулем, направлением и точкой приложения*.

Линия действия силы – прямая, вдоль которой направлена сила.

Система сил – совокупность сил, приложенных к одному твердому телу.

Уравновешенная система сил – система сил, под действием которой остановленное твердое тело будет сохранять состояние покоя.

Проекция силы на ось – алгебраическая величина, равная

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = F \cos \alpha,$$

где \vec{i} – орт, идущий по оси x ; α – угол между осью x и силой \vec{F} (рис. 1.1).

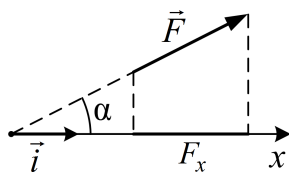


Рис. 1.1

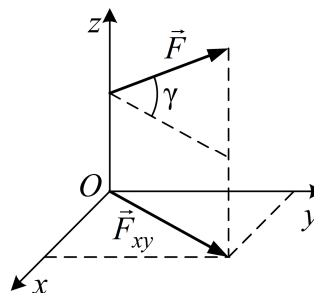


Рис. 1.2

Проекция силы на плоскость – вектор, модуль которого равен

$$F_{xy} = F \cos \gamma,$$

где γ – угол между силой \vec{F} и плоскостью xOy (рис. 1.2).

В системе СИ единицей измерения силы является производная величина – 1 ньютон (Н).

1.2.2. Инертность и масса тела

Опыт показывает, что если одну и ту же силу приложить к двум разным покоящимся телам, то в общем случае по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертность – свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять свою скорость под действием приложенных сил. Это свойство инертности зависит от массы тела, которая может служить мерой инертности.

Масса – одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства.

Масса тела не является неизменной и зависит от скорости движения. Например, инертность заряженной частицы возрастает с увеличением ее скорости. Теория относительности устанавливает следующую зависимость между массой тела, находящегося в покое, и массой движущегося тела:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

где m – масса движущегося тела; m_0 – масса покоя; v – скорость движения тела; $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

Очевидно, чем выше скорость движения тела, тем больше его масса и, следовательно, тем сложнее сообщить ему дальнейшее ускорение.

1.2.3. Момент силы относительно точки и оси

Алгебраическим моментом силы \vec{F} относительно точки O называют взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля этой силы на ее плечо h (рис. 1.3):

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh.$$

Плечо силы – это кратчайшее расстояние от моментной точки O до линии действия силы (рис. 1.3).

Алгебраический момент силы имеет знак «+», если сила стремится вращать тело вокруг моментной точки против часовой стрелки; «-» – по часовой стрелке.

Вектор-момент силы $\vec{M}_O(\vec{F})$ относительно точки O – вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора \vec{r} , идущего из точки O в точку приложения силы, на силу \vec{F} (рис. 1.3):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.1)$$

Модуль вектора-момента равен алгебраическому моменту силы:

$$M_O(\vec{F}) = rF \sin \alpha = Fh.$$

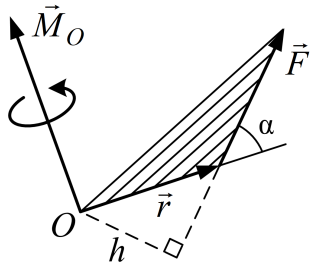


Рис. 1.3

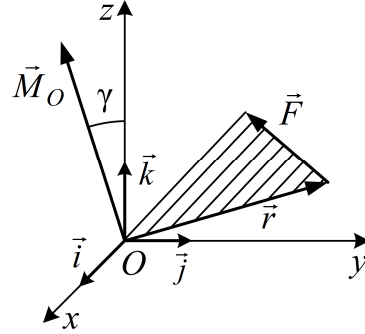


Рис. 1.4

Формула (1.1) позволяет записать аналитическое выражение для вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$.

Если точка O – начало декартовой системы координат; F_x, F_y, F_z – проекции силы \vec{F} на координатные оси; x, y, z – координаты точки приложения силы \vec{F} , то вектор-момент силы \vec{F} относительно точки O определяется следующим образом (рис. 1.4):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}.$$

Выражения, стоящие в круглых скобках перед ортами в полученной формуле, представляют собой проекции вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на координатные оси:

$$M_{Ox} = yF_z - zF_y, \quad M_{Oy} = zF_x - xF_z, \quad M_{Oz} = xF_y - yF_x.$$

Если на тело, которое может вращаться вокруг оси z , действует сила \vec{F} (рис. 1.5), то **момент силы относительно оси z** равен

$$M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| \cdot h,$$

где \vec{F}_{xy} – проекция силы \vec{F} на плоскость, перпендикулярную оси z ;

h – плечо проекции \vec{F}_{xy} силы \vec{F} .

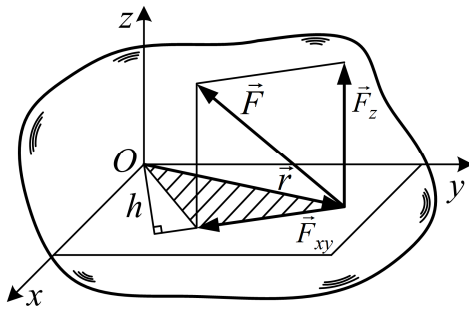


Рис. 1.5

Знак «+» выбирается в случае, когда стремление силы вращать тело видится с конца оси z против часовой стрелки. Сила \vec{F} , показанная на рис. 1.5, создает отрицательный момент $M_z(\vec{F})$.

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси.

Если сила и ось лежат в одной плоскости (сила либо параллельна оси, либо пересекает ось), то момент силы относительно оси равен нулю. Это означает, что нельзя сообщить телу вращение вокруг оси, если сила параллельна оси или ее пересекает.

В системе СИ единицей измерения момента является 1 Н·м или 1 ньютон умножить на 1 метр.

1.2.4. Пара сил и ее момент

Пара сил – это совокупность двух параллельных сил, равных по величине, противоположных по направлению, приложенных к одному твердому телу: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Пара сил стремится вращать тело. Мерой вращательного действия служит **вектор-момент пары сил** $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, равный вектору-моменту одной из сил пары относительно точки, лежащей на линии действия другой силы (рис. 1.6):

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) = \vec{M}_A(\vec{F}_2).$$

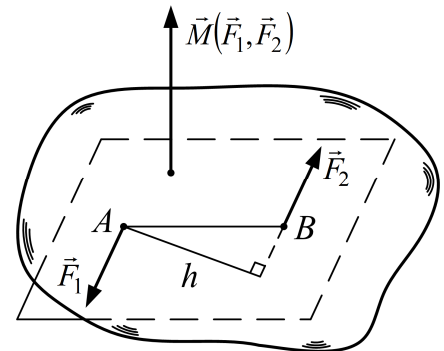


Рис. 1.6

Модуль вектора-момента пары равен:

$$|\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)| = F_1 h = F_2 h,$$

где h – плечо пары, т.е. кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Произведение одной из сил пары на ее плечо, взятое со знаком «+» или «-», называют **алгебраическим моментом пары сил**:

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm F_1 h = \pm F_2 h.$$

Теорема о векторе-моменте пары сил: сумма векторов-моментов сил пары не зависит от выбора моментной точки (точки, относительно которой вычисляется момент) и равна вектору-моменту пары.

Доказательство (рис. 1.7):

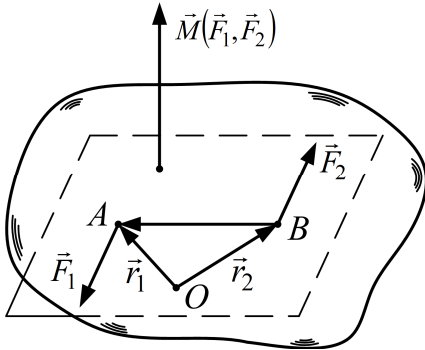


Рис. 1.7

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \\ &= \vec{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2).\end{aligned}$$

Следствие: вектор-момент пары – вектор свободный. Свободный вектор можно переносить параллельно самому себе в любую точку тела.

Данное следствие позволяет оперировать не парой сил, а ее вектором-моментом или просто моментом.

Наряду с силой момент можно считать еще одной мерой взаимодействия между телами.

1.3. Аксиомы механики

Теоретическая механика относится к числу аксиоматических дисциплин. Аксиомы механики впервые сформулированы Исааком Ньютоном в сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687).

Аксиома первая. Закон инерции Галилея – Ньютона

Существует такая система отсчета, называемая инерциальной, в которой материальная точка продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, если только приложенные к ней силы не побуждают ее изменить свое состояние.

Движение, совершаемое материальной точкой при отсутствии сил или под воздействием уравновешенной системы сил, называется движением по инерции.

Аксиома вторая. Второй закон Ньютона

Ускорение \vec{a} , сообщаемое материальной точке в инерциальной системе отсчета, пропорционально действующей на точку силе \vec{F} и обратно пропорционально массе m материальной точки:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.2)$$

Система отсчета, в которой выполняются первая и вторая аксиомы механики, называется **инерциальной системой отсчета**. Инерциальность системы отсчета может быть проверена только опытным путем.

Для большинства технических задач систему отсчета, связанную с Землей, можно приближенно считать инерциальной.

Аксиома третья. Закон равенства действия и противодействия

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными в противоположные стороны по прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad F_1 = F_2. \quad (1.3)$$

Аксиома четвертая. Принцип независимости действия сил

Материальная точка, на которую действует несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, получает ускорение \vec{a} , равное геометрической сумме ускорений, которые она получила бы при действии каждой силы в отдельности:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

Приведем следствия из принципа независимости действия сил.

Следствие 1. Две силы можно сложить по правилу параллелограмма: две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенные к одной материальной точке, можно заменить одной силой \vec{F} , равной диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.8):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

причем модуль силы равен

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha},$$

где α – угол между силами \vec{F}_1 и \vec{F}_2 .

Следствие 2. Силу \vec{F} , приложенную к некоторой точке, можно разложить на составляющие \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 по трем взаимно перпендикулярным направлениям, приложенные к той же точке (рис. 1.9), при этом

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

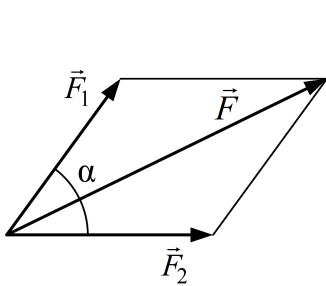


Рис. 1.8

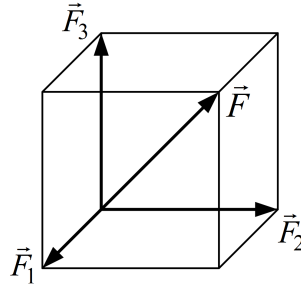


Рис. 1.9

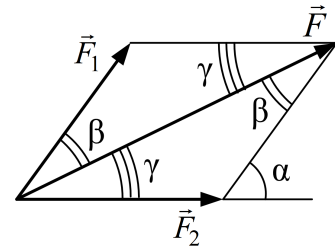


Рис. 1.10

Следствие 3. Силу \vec{F} , приложенную к некоторой точке на плоскости, можно разложить на две составляющие \vec{F}_1 и \vec{F}_2 по двум произвольно выбранным направлениям (рис. 1.10), при этом по теореме синусов:

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F}{\sin \alpha}.$$

1.4. Главный вектор и главный момент системы сил. Эквивалентные системы сил. Равнодействующая

1.4.1. Главный вектор системы сил

Главный вектор системы сил – это геометрическая сумма сил:

$$\vec{F}^{\Gamma\Pi} = \sum \vec{F}_i.$$

Проекции главного вектора системы сил на декартовые оси координат:

$$\begin{aligned} F_x^{\Gamma\Pi} &= \sum F_{ix} = \sum X_i, \\ F_y^{\Gamma\Pi} &= \sum F_{iy} = \sum Y_i, \\ F_z^{\Gamma\Pi} &= \sum F_{iz} = \sum Z_i. \end{aligned}$$

Модуль главного вектора и его направляющие косинусы:

$$F^{\text{гл}} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}, \quad (1.5)$$

$$\cos(\vec{F}^{\text{гл}}, \vec{i}) = \frac{\sum X_i}{F^{\text{гл}}}, \quad \cos(\vec{F}^{\text{гл}}, \vec{j}) = \frac{\sum Y_i}{F^{\text{гл}}}, \quad \cos(\vec{F}^{\text{гл}}, \vec{k}) = \frac{\sum Z_i}{F^{\text{гл}}}.$$

1.4.2. Главный момент системы сил

Главный момент системы сил относительно точки O – это геометрическая сумма векторов-моментов всех сил системы относительно точки O :

$$\vec{M}_O^{\text{гл}} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Главный момент относительно точки O можно выразить через его проекции на оси координат:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (\sum M_x) \vec{i} + (\sum M_y) \vec{j} + (\sum M_z) \vec{k}.$$

Модуль главного момента и его направляющие косинусы подсчитываются по формулам, аналогичным (1.5).

Главный вектор и главный момент – важнейшие характеристики системы сил. Как будет показано в динамике, они определяют движение тела.

1.4.3. Эквивалентные системы сил. Равнодействующая системы сил

Две системы сил называются **эквивалентными**, если равны их главные векторы, а также равны и их главные моменты относительно одной и той же точки.

Таким образом, системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ и $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m$ являются эквивалентными, если

$$\vec{F}^{\text{гл}}(\vec{F}) = \vec{F}^{\text{гл}}(\vec{Q}), \quad (1.6)$$

$$\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}) = \vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{Q}). \quad (1.7)$$

Из условия эквивалентности двух систем сил следует, что силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия.

Для доказательства рассмотрим две системы сил. Первая – это система сил, состоящая из одной силы \vec{F} , приложенной в точке A (рис. 1.11, а). Вторая система сил состоит из одной силы \vec{F} , приложенной в точке B (рис. 1.11, б). Рассмотрим точку O на прямой AB .



Рис. 1.11

Определим для этих систем главные векторы и главные моменты относительно точки O :

$$(\vec{F}^{\text{гл}})_1 = (\vec{F}^{\text{гл}})_2 = \vec{F}, \quad (\vec{M}_O^{\text{гл}})_1 = (\vec{M}_O^{\text{гл}})_2 = 0.$$

Таким образом, в соответствии с (1.6) и (1.7) рассматриваемые системы являются эквивалентными.

Следовательно, *сила, приложенная к твердому телу – вектор скользящий*.

Равнодействующая системы сил – это одна сила, эквивалентная системе сил.

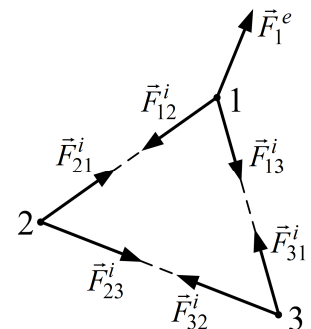
Если система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ имеет равнодействующую \vec{R} , то условия (1.6) и (1.7) будут записаны так:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}^{\text{гл}}(\vec{F}), \\ \vec{M}_O(\vec{R}) &= \vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.5. Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил

Внешние силы – это силы, с которыми точки или тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему, действуют на точку или тело рассматриваемой системы.

Внутренние силы – это силы, с которыми точки или тела одной и той же системы действуют на выделенную точку или тело этой же системы.



Внешние силы будем снабжать верхним индексом "e", внутренние силы – верхним индексом "i" (индексы *e* и *i* от начальных букв французских слов *exterieur* – внешний и *interieur* – внутренний). Рис. 1.12

На рис. 1.12 изображена механическая система, состоящая из трех точек. На точку 1 этой системы действует внешняя сила \vec{F}_1^e . Силы взаимодействия между точками системы являются внутренними, например, \vec{F}_{12}^i , \vec{F}_{21}^i .

Деление сил на внешние и внутренние носит условный характер и зависит от выбора объекта исследования. Например, если из рассмотренной выше системы (рис. 1.12) выделить систему, состоящую только из точек 1 и 2, то бывшие внутренние силы \vec{F}_{23}^i , \vec{F}_{13}^i окажутся внешними.

Внутренние силы по третьей аксиоме попарно равны и противоположны по направлению. Для системы внутренних сил *главный вектор* $\vec{F}^{i \text{ гл}}$ и *главный момент* $\vec{M}_O^{i \text{ гл}}(\vec{F}^i)$ относительно произвольного центра *O* равны нулю:

$$\vec{F}^{i \text{ гл}} = 0, \vec{M}_O^{i \text{ гл}}(\vec{F}^i) = 0.$$

Эти равенства выражают свойства внутренних сил.

Лекция 2. Связи и их реакции. Распределенная нагрузка. Трение

Связи и их реакции. Распределенная нагрузка. Трение скольжения. Конус трения. Трение качения.

2.1. Связи и их реакции

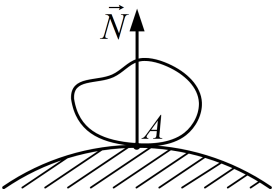
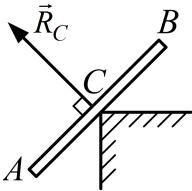
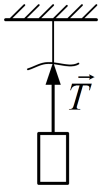
Если движению тела по любому направлению в пространстве ничто не препятствует, то тело называют **свободным**, в противном случае – **несвободным**. Тела, препятствующие движению данного тела, называют **связями**.

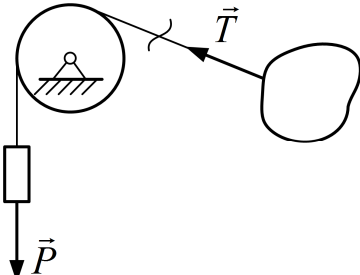
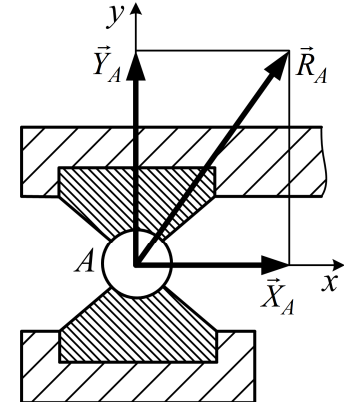
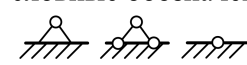
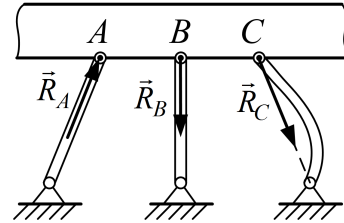
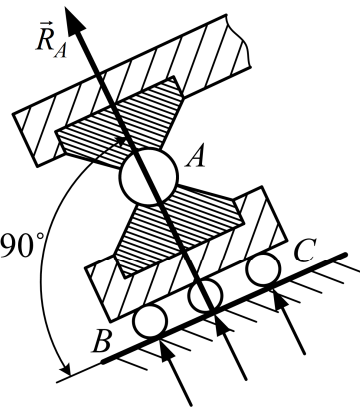

Несвободное тело можно представить свободным, отбросив связи и заменив их силами – *силами реакций связей*. В этом состоит аксиоматический **принцип освобожденности от связей**.

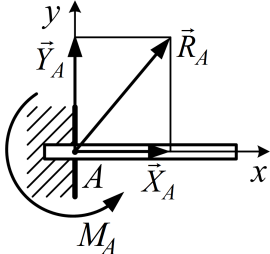
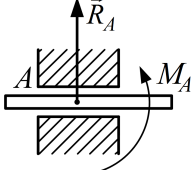
Общее правило для определения направления силы реакции таково: *сила реакции действует противоположно тому направлению, по которому связь препятствует перемещению тела*.

Виды некоторых связей и их реакции сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Виды связей и их реакции

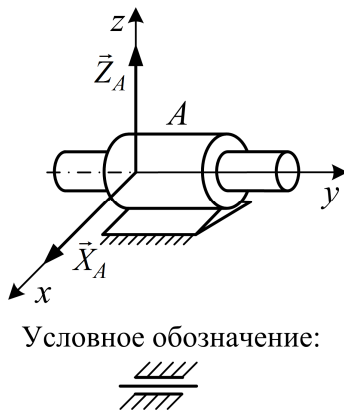

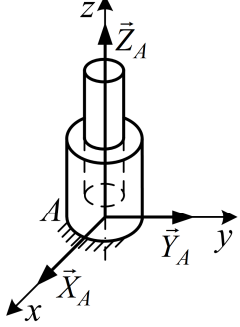

№ п/п	Изображение связи	Наименование связи	Реакция связи
1		Опора – гладкая поверхность	Реакция \vec{N} опоры идет по общей нормали к контактирующим поверхностям в точке A контакта
2		Опора C – острие (ребро)	Реакция \vec{R} опоры идет по нормали к той из двух контактирующих поверхностей, для которой возможно построение нормали
3		Канат, трос	Реакция \vec{T} направлена вдоль нити. Следует помнить, что нить работает только на растяжение

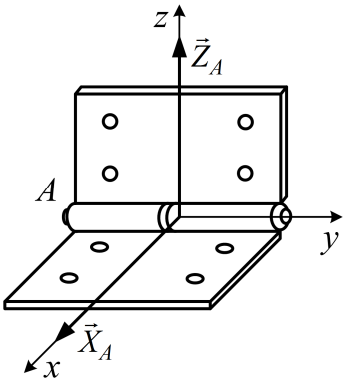
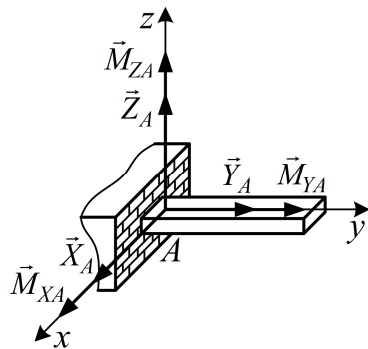
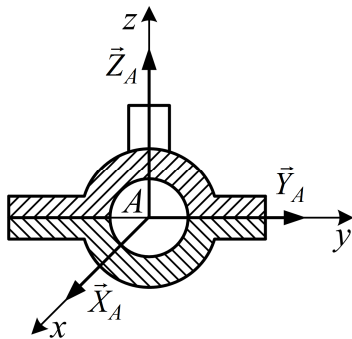
№ п/п	Изображение связи	Наименование связи	Реакция связи
4		Нить, удерживающая груз, перекинута через блок и прикреплена к телу, находящемуся в равновесии	Реакция \vec{T} нити, приложенная к телу, равна P . Блок меняет направление силы P , не меняя ее величины, если трением на блоке пренебречь
5	 <p>Условные обозначения:</p> 	Опора A – шарнирно-неподвижная опора (цилиндрический шарнир). Позволяет балке поворачиваться вокруг оси A цилиндрического шарнира. Весь опорный узел считается одной геометрической точкой	Реакция \vec{R}_A проходит через ось шарнира и заранее неизвестна ни по величине, ни по направлению. Реакцию \vec{R}_A следует представлять в виде двух составляющих: \vec{X}_A и \vec{Y}_A
6		Опоры A, B, C – стержневые опоры	Реакция ($\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{R}_C$) стержневой опоры идет по прямой, соединяющей шарнирные точки
7	 <p>Условные обозначения:</p> 	Опора A – шарнирно-подвижная опора. Позволяет балке поворачиваться вокруг оси A шарнира и смещаться вдоль опорной плоскости BC катков.	Реакция \vec{R}_A проходит через центр шарнира и является результирующей нормальных реакций опорной плоскости катков. Направлена по перпендикуляру к опорной плоскости катков в сторону от опорной плоскости

№ п/п	Изображение связи	Наименование связи	Реакция связи
8		Опора А – <i>плоская заделка</i>	Реакция плоской заделки состоит из силы \vec{R}_A с составляющими \vec{X}_A и \vec{Y}_A и момента M_A
9		Опора А – <i>скользящая заделка</i>	Реакция скользящей заделки состоит из силы \vec{R}_A и момента M_A

Виды некоторых пространственных связей и их реакции сведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Виды пространственных связей и их реакции

№ п/п	Изображение связи, условное обозначение	Наименование связи	Реакция связи
1	 Условное обозначение: 	Опора А – <i>радиальный подшипник</i> . Весь подшипник считается одной геометрической точкой (т. А)	Реакция расположена в плоскости, перпендикулярной оси вращения вала, имеет две составляющие: \vec{X}_A , \vec{Z}_A
2	 Условное обозначение: 	Опора А – <i>радиально-упорный подшипник (подпятник)</i>	Реакция подпятника имеет три составляющие: \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A

№ п/п	Изображение связи, условное обозначение	Наименование связи	Реакция связи
3		Опора A – <i>петля</i>	Петля дает реакцию, расположенную в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, с составляющими: \vec{X}_A , \vec{Z}_A
4		Опора A – <i>пространственная заделка</i>	Реакция имеет 6 составляющих: \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A и \vec{M}_{Ax} , \vec{M}_{Ay} , \vec{M}_{Az}
5		Опора A – <i>сферический (шаровой) шарнир</i>	Три составляющие опорной реакции: \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A

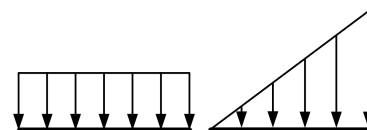
2.2. Распределенная нагрузка

Наряду с сосредоточенными силами в инженерных задачах рассматриваются силы, распределенные по объему, по поверхности или по линии.

Рассмотрим простейшие примеры параллельных сил, распределенных по *отрезку прямой* (например, слой снега на электропроводах).

Распределенная нагрузка характеризуется ее *интенсивностью* q – величиной силы, приходящейся на единицу длины. Интенсивность измеряется в Н/м.

Распределенную нагрузку необходимо заменять одной сосредоточенной силой – равнодействующей интенсивной нагрузки.



Наиболее часто встречающиеся виды *Рис. 2.1* *Рис. 2.2* распределенной нагрузки – *равномерно распределенная нагрузка* (рис. 2.1) и *нагрузка, распределенная по линейному закону* (рис. 2.2).

Нагрузка интенсивностью q , равномерно распределенная вдоль отрезка длины l , имеет равнодействующую, приложенную в середине отрезка и равную $Q = ql$ (рис. 2.3).

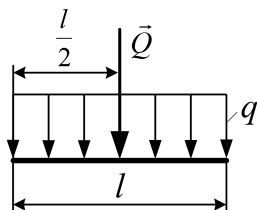


Рис. 2.3

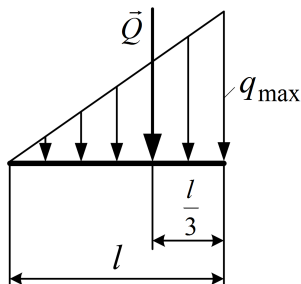


Рис. 2.4

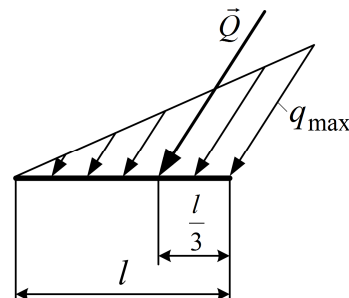


Рис. 2.5

Нагрузка, распределенная по линейному закону вдоль отрезка длины l , имеет равнодействующую, приложенную на расстоянии $\frac{l}{3}$ от максимальной величины интенсивности q_{\max} и равную $Q = \frac{1}{2} q_{\max} l$ (рис. 2.4). Результаты не изменятся, если распределенная нагрузка приложена под углом к отрезку (рис. 2.5).

2.3. Трение

2.3.1. Трение скольжения. Конус трения

При стремлении сдвинуть тело, лежащее на шероховатой поверхности, возникает *реакция опорной поверхности*, которая имеет две составляющие: нормальная реакция \vec{N} и сила $\vec{F}^{\text{тр}}$ трения скольжения (рис. 2.6).

Если к телу весом P , лежащему на горизонтальной поверхности (рис. 2.6), приложить горизонтальную силу Q , то тело может остаться в покое или начать двигаться. В случае покоя из условия равновесия $\sum X = 0$ следует, что к данному

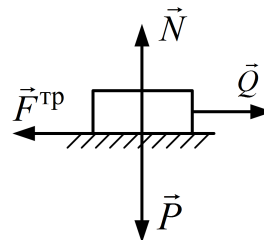


Рис. 2.6

телу приложена сила трения – $\vec{F}^{\text{тр}}$, называемая **силой трения скольжения**. Состояние равновесия будет сохраняться при увеличении силы Q до определенного предельного значения, после достижения которого тело начнет двигаться. В случае предельного равновесия сила трения достигает своего максимального значения $F_{\max}^{\text{тр}}$. Сила трения скольжения расположена в общей касательной плоскости двух контактирующих тел, равна по величине силе Q и противоположна ей по направлению.

Опытным путем установлены следующие **законы Амонтона – Кулона**:

1. Сила трения скольжения не зависит от площади контакта контактирующих поверхностей.

2. Максимальное значение силы трения скольжения прямо пропорционально величине нормальной реакции:

$$F_{\max}^{\text{тр}} = fN,$$

где N – нормальная реакция;

f – коэффициент трения скольжения (безразмерная величина).

3. Сила трения скольжения зависит от материала и состояния контактирующих поверхностей.

Коэффициент f зависит от материала, шероховатости и состояния трущихся поверхностей, наличия и вида смазки. Коэффициент трения скольжения определяется экспериментально. Так, для пары металл по металлу $f = 0,15$, а точильного камня по стали – $f = 0,94$.

Таким образом, сила трения скольжения изменяется в пределах

$$0 \leq F^{\text{тр}} \leq F_{\max}^{\text{тр}},$$

располагается в общей касательной плоскости соприкасающихся тел и направлена противоположно той скорости, которую приобретает точка контакта при выходе тела из равновесия.

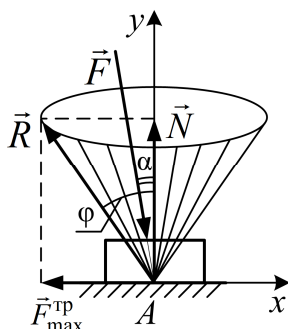


Рис. 2.7

Полная реакция \vec{R} (рис. 2.7) шероховатой поверхности отклоняется от нормальной реакции \vec{N} в предельном случае равновесия на некоторый угол ϕ , называемый *углом трения*.

Из рис. 2.7 видно, что $\operatorname{tg} \phi = \frac{F_{\max}^{\text{тр}}}{N} = f$.

Если прикладываемая к твердому телу нагрузка меняет свое направление, то меняет свое направление и сила $F_{\max}^{\text{тр}}$, а, следовательно, и сила \vec{R} .

Полная реакция \vec{R} при произвольном изменении направления приложенной нагрузки опишет коническую поверхность, называемую **конусом трения** (рис. 2.7).

Если действующая на тело сила \vec{F} проходит внутри конуса трения (рис. 2.7), то какой бы эта сила ни была по величине, она не сможет вывести тело из равновесия.

Действительно, тело будет двигаться под действием силы F , составляющей с нормалью угол α , только при условии

$$F_x \geq F_{\max}^{\text{тр}}. \quad (2.1)$$

Поскольку $F_x = F \sin \alpha$, $F_{\max}^{\text{тр}} = fN = F \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$, то условие (2.1) приводится к виду $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi$. Но угол α меньше угла φ . Это противоречие показывает, что сила \vec{F} не сдвинет тело. С этим связано явление *самозаклинивания* или *самоторможения*.

2.3.2. Трение качения

Рассмотрим каток весом P и радиусом R , находящийся на горизонтальной поверхности. Если на каток подействовать силой \vec{Q} (рис. 2.8), то каток либо останется в покое, либо начнет двигаться.

Если каток и поверхность считать абсолютно твердыми телами, а контакт точечным, то в состоянии покоя условия равновесия не выполняются: $\sum M_A = -QR \neq 0$.

Чтобы уравнения равновесия выполнялись, следует отказаться от модели абсолютно твердого тела и учесть, что контакт не точечный, а происходит по поверхности. Тогда реакция поверхности представляет собой распределенную нагрузку, а нормальная реакция \vec{N} является ее равнодействующей. Сила \vec{N} приложена не в точке A , а сдвинута в сторону возможного движения на некоторое расстояние δ_k (рис. 2.9).

Произведение нормальной реакции на расстояние δ_k называют **моментом трения качения** – $M_k^{\text{тр}}$. В случае предельного равновесия момент трения качения равен (рис. 2.9):

$$M_{k \max}^{\text{тр}} = \delta_k N,$$

где δ_k – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины.
Для случая качения вагонного колеса по стальному рельсу $\delta_k \approx 0,5$ мм.
Таким образом, момент трения качения меняется в пределах:

$$0 \leq M_k^{\text{тр}} \leq M_{k \max}^{\text{тр}} = \delta_k N.$$

Обычно в задачах принимают $M_k^{\text{тр}} = M_{k \max}^{\text{тр}} = \delta_k N$.

Для того чтобы рассматривать принятую в теоретической механике модель абсолютно твердого тела, при отбрасывании связей с учетом трения качения реакцию этой связи представляют в следующем виде: сила \vec{N} нормального давления, сила $\vec{F}^{\text{тр}}$ трения скольжения и момент $M_{\text{к}}^{\text{тр}}$ трения качения. Обе силы приложены в точке A (рис. 2.10).

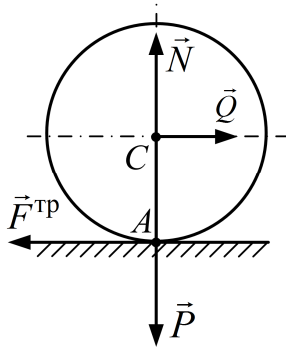


Рис. 2.8

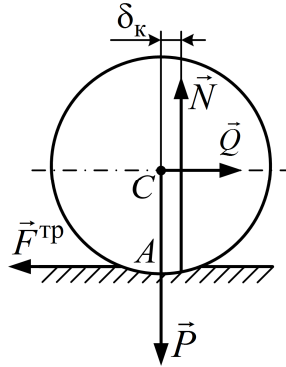


Рис. 2.9

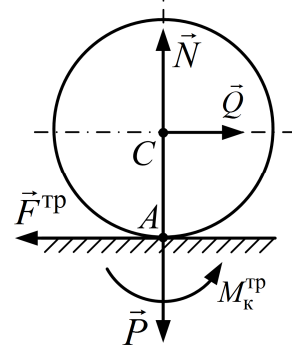


Рис. 2.10

Следует учитывать, что трение скольжения характеризуется силой, а трение качения – моментом.

Лекция 3. Условия равновесия твердого тела.

Равновесие сочлененных систем

Две основные задачи статики. Необходимые и достаточные условия равновесия абсолютно твердого тела. Частные случаи равновесия твердого тела. Равновесие сочлененной системы твердых тел. Аксиома отвердевания. Статически определимые и неопределимые системы.

3.1. Две основные задачи статики

Первая задача статики — нахождение условий, которым должны удовлетворять силы, чтобы твердое тело под действием этих сил находилось в равновесии.

Тело считается находящимся в равновесии под действием некоторой системы сил, если оно, будучи остановленным, сохраняет состояние покоя при действии той же системы сил сколь угодно долго.

Равновесие — это покой или равномерное, прямолинейное, поступательное движение тела. В обоих случаях ускорения всех точек тела равны нулю.

Первую задачу называют задачей о получении условий равновесия тела.

Вторая задача статики — задача о замене данной системы сил, действующей на тело, другой, ей эквивалентной.

3.2. Условия равновесия твердого тела

Рассмотрим абсолютно твердое тело как механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которую действует произвольная пространственная система сил.

Для каждой точки этой механической системы на основе второй аксиомы механики можно записать уравнение:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.1)$$

где \vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i — соответственно равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к произвольной точке k этой системы.

Для механической системы, состоящей из n материальных точек, имеем:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i.$$

Поскольку рассматриваемая механическая система находится в равновесии, то $\vec{a}_k = 0$.

По свойству внутренних сил $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$, поэтому

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0 \text{ или } \vec{F}^{e \text{ гл}} = 0,$$

где $\vec{F}^{e \text{ гл}}$ – главный вектор внешних сил.

Умножая для каждой точки механической системы обе части уравнения (3.1) слева векторно на радиус-вектор точки k и далее суммируя обе части уравнения по всем точкам системы, получаем:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i)$$

или

$$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k) = \vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}^e) + \vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}^i).$$

Поскольку $\vec{a}_k = 0$ и $\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}^i) = 0$, окончательно имеем:

$$\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}^e) = 0.$$

Уравнения $\vec{F}^{e \text{ гл}} = 0$ и $\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}^e) = 0$ называют условиями (уравнениями) равновесия абсолютно твердого тела в векторной форме.

Из равенства нулю главного вектора и главного момента следует, что при равновесии тела сумма проекций всех действующих сил на любую ось и сумма моментов всех сил относительно любой оси равны нулю.

Двум векторным условиям равновесия $\vec{F}^{e \text{ гл}} = 0$ и $\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}^e) = 0$ соответствуют шесть скалярных уравнений в проекциях на декартовы оси координат:

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}^e = 0, \quad \sum_k F_{ky}^e = 0, \quad \sum_k F_{kz}^e = 0, \\ \sum_k M_{Ox}(\vec{F}_k^e) = 0, \quad \sum_k M_{Oy}(\vec{F}_k^e) = 0, \quad \sum_k M_{Oz}(\vec{F}_k^e) = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения равновесия можно записывать в упрощенной форме:

$$\begin{aligned} 1. \sum X &= 0; & 4. \sum M_x &= 0; \\ 2. \sum Y &= 0; & 5. \sum M_y &= 0; \\ 3. \sum Z &= 0; & 6. \sum M_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полученные уравнения (3.2) являются *необходимыми и достаточными условиями равновесия абсолютно твердого тела*.

Для деформируемого тела и механической системы, состоящей из нескольких твердых тел, эти уравнения являются лишь *необходимыми, но не достаточными*. Это можно проиллюстрировать на примере ножниц, представляющих собой механическую систему, состоящую из трех тел: двух половинок ножниц и соединяющего их цилиндрического шарнира.

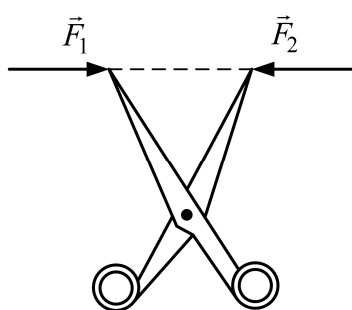


Рис. 3.1

Если к несомкнутым половинкам ножниц, лежащим на столе, приложить две равные противоположно направленные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (рис. 3.1), то ножницы начнут смыкаться несмотря на то, что главный вектор и главный момент приложенных сил равны нулю. И только если ножницы сомкнуты или если в них заржавеет шарнир (достаточные условия), то под действием указанных двух сил ножницы останутся в покое.

В отдельных частных случаях некоторые из уравнений равновесия (3.2) обращаются в тождества и количество условий равновесия сокращается.

3.3. Частные случаи равновесия твердого тела

3.3.1. Равновесие тела при действии двух сил

Если твердое тело находится в равновесии под действием двух сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , то эти силы равны по величине и действуют по одной прямой в противоположные стороны (рис. 3.2).

При указанных условиях главный вектор и главный момент (относительно любой точки) равны нулю.

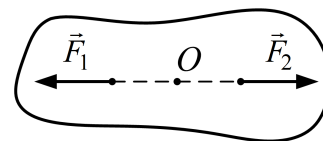


Рис. 3.2

3.3.2. Равновесие тела при действии трех сил (теорема о трех силах)

Теорема о трех силах: если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, то эти силы лежат в одной плоскости и линии действия их пересекаются в одной точке (рис. 3.3, 3.4).

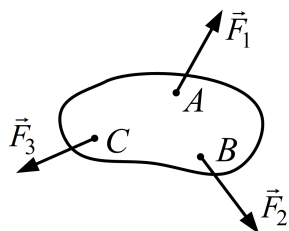


Рис. 3.3

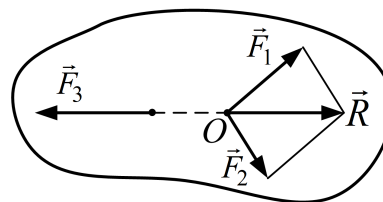


Рис. 3.4

3.3.3. Равновесие тела при действии сходящейся системы сил

Если тело находится в равновесии при действии *пространственной системы сходящихся сил* (линии действия пересекаются в одной точке), то равновесие тела описывается тремя уравнениями равновесия (рис. 3.5):

1. $\sum X = 0;$
2. $\sum Y = 0;$
3. $\sum Z = 0.$

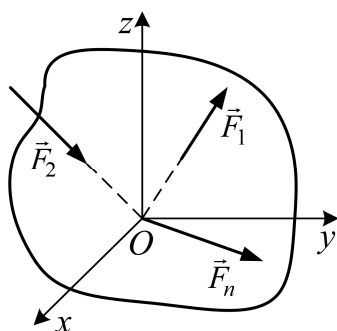


Рис. 3.5

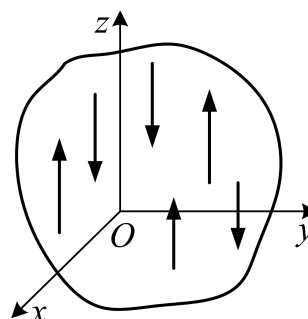


Рис. 3.6

3.3.4. Равновесие тела при действии системы параллельных сил

Если тело находится в равновесии при действии *пространственной системы сил, параллельных оси z* (рис. 3.6), то первые два уравнения системы (3.2) обращаются в тождества, поскольку силы перпендикулярны осям x и y , а последнее уравнение обращается в тождество, поскольку силы, параллельные оси, не создают момента относительно этой оси.

Таким образом, уравнениями равновесия в этом случае служат следующие три уравнения:

1. $\sum Z = 0;$
2. $\sum M_x = 0;$
3. $\sum M_y = 0.$

3.3.5. Равновесие тела при действии произвольной системы пар сил

Если тело находится в равновесии под действием *произвольной системы пар сил*, то:

1. $\sum M_x = 0;$
2. $\sum M_y = 0;$
3. $\sum M_z = 0.$

3.3.6. Равновесие твердого тела при действии плоской системы сил

Для системы сил, расположенной в плоскости xOy (плоская система сил), из шести уравнений равновесия остаются три уравнения (рис. 3.7):

1. $\sum X = 0;$
2. $\sum Y = 0;$
3. $\sum M_z = 0.$

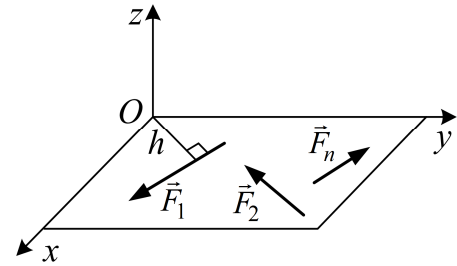


Рис. 3.7

Поскольку все силы лежат в плоскости xOy , то момент любой из сил относительно оси x будет равен нулю, т.к. силы и ось лежат в одной плоскости. Аналогично все силы и ось y также лежат в одной плоскости. Поэтому 4-е и 5-е уравнения системы (3.2) будут иметь вид $0 = 0$. Момент любой из сил относительно оси z , равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от точки O (точки пересечения оси z с плоскостью xOy) до линии действия силы, т.е. на плечо:

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh.$$

Условия равновесия плоской системы сил будем записывать в таком виде:

1. $\sum X = 0;$
2. $\sum Y = 0;$
3. $\sum M_O = 0.$

Могут быть составлены и другие наборы уравнений равновесия плоской системы сил:

1. $\sum X = 0;$
2. $\sum M_A = 0;$
3. $\sum M_B = 0.$

Здесь A и B – точки, лежащие в плоскости действия сил. При этом прямая AB не должна быть перпендикулярна оси x . Иначе может оказаться, что левые части уравнений будут равны нулю, а тело не будет находиться в равновесии, если к нему, например, приложить силу, направленную вдоль прямой AB .

Аналогично, могут быть использованы уравнения равновесия с тремя моментными точками:

$$1. \sum M_A = 0;$$

$$2. \sum M_B = 0;$$

$$3. \sum M_C = 0,$$

причем точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

При составлении уравнений равновесия тела при действии *плоской системы сил* следует понимать, что наборы уравнений равновесия могут быть различными, но *число независимых уравнений*, входящих в набор, для одного и того же тела не может быть более *трех*. Любое четвертое уравнение окажется линейно зависимым от первых трех. Аналогично при равновесии тела под действием пространственной системы сил нельзя составить более *шести независимых уравнений равновесия*.

3.4. Равновесие сочлененных систем

Ранее рассматривалось равновесие одного твердого тела. Перейдем к изучению равновесия *сочлененных систем*, т.е. систем твердых тел, соединенных между собой тем или иным способом.

Методика решения задач, связанных с равновесием сочлененных систем, заключается в расчленении системы на отдельные твердые тела и составлении условий равновесия для каждого из этих тел. Действие отбрасываемых тел на рассматриваемое заменяется *силами реакций*.

При расчленении системы на отдельные тела нужно руководствоваться следующими рекомендациями. Если два тела соединены друг с другом шарниром (болтом, рис. 3.8), то следует «вывинтить» этот болт и заменить его действие на разъединенные тела силами реакций (рис. 3.9).

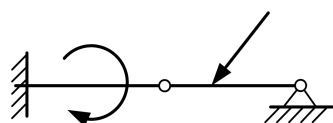


Рис. 3.8

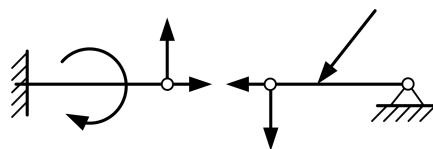
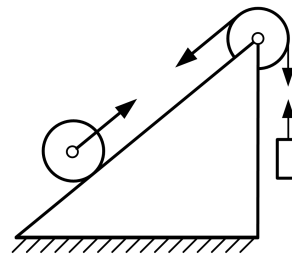
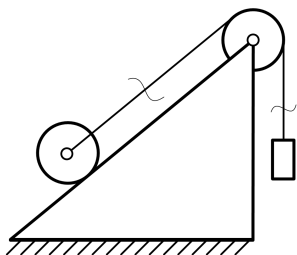


Рис. 3.9

Если тела связаны между собой тросами (рис. 3.10), то эти тросы нужно мысленно разрезать, заменив их действие реакциями, идущими по тросам (рис. 3.11).



При соединении тел стержнями возможны две ситуации: тела соединены идеальными стержнями или нагруженными стержнями.

Ситуация 1. Если тела связаны соединительными стержнями, имеющими на концах шарниры (для соединения с другими телами) и не несущими по всей своей длине заданных сил (рис. 3.12), то эти стержни следует разрезать, заменив их действие на тела основной конструкции реакциями, направленными по прямым, соединяющим шарниры этих стержней (рис. 3.13).

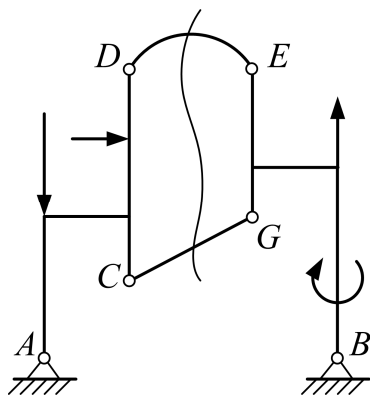


Рис. 3.12

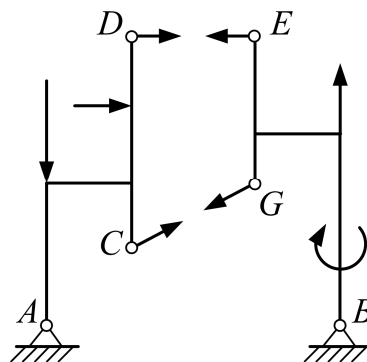


Рис. 3.13

Ситуация 2. Если же к стержням приложены заданные силы, то такие стержни надо рассматривать как тела основной конструкции. «Разрезать» такие стержни не целесообразно, поскольку при наличии внешней нагрузки в каждом сечении такого стержня действует не только продольная, но и поперечная сила, а также изгибающий момент, величины которых заранее не известны.

3.4.1. Аксиома отвердевания

Аксиома отвердевания: если система твердых тел находится в равновесии, то равновесие не нарушится при отвердевании системы.

Механическая система после отвердевания рассматривается как единое абсолютно твердое тело.

3.4.2. Статически определимые и неопределимые системы

Если для некоторой механической системы, находящейся в равновесии, все неизвестные величины могут быть определены из условий равновесия, то такая система называется **статически определимой**.

Если число неизвестных превышает число независимых уравнений равновесия, то система называется **статически неопределимой**.

Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия называется **степенью статической неопределимости**. Степень статической неопределимости будем обозначать N .

В задачах в качестве неизвестных обычно выступают силы реакций, наложенных на систему. Если силы реакций могут быть определены из уравнений равновесия, то для такой системы $N = 0$.

Система, изображенная на рис. 3.14, на которую действует внешняя нагрузка в виде силы \vec{F} и момента M , является статически неопределимой с $N = 2$, поскольку для нее можно составить только три независимых уравнения равновесия (плоская система сил), а неизвестных реакций пять: X_A , Y_A , M_A , X_B , Y_B (рис. 3.15).

Статически неопределима и система, показанная на рис. 3.16. Имеем пять неизвестных реакций (три дает плоская заделка A и две – шарнирно-неподвижная опора B), а число уравнений равновесия – 4: три уравнения для всей системы в целом и одно, например, для тела BC (сумма моментов относительно шарнира C), следовательно, $N = 1$.

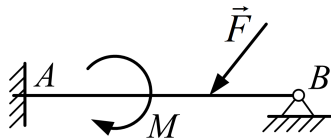


Рис. 3.14

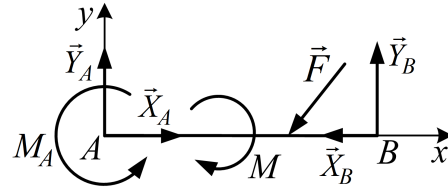


Рис. 3.15

Степень статической неопределимости показывает число «лишних» связей, наложенных на систему. Например, в схеме (рис. 3.14) можно убрать шарнирно-неподвижную опору B (две неизвестные реакции); при этом конструкция останется работоспособной (балка останется в равновесии под действием заданной нагрузки), и система станет статически определимой (рис. 3.17).

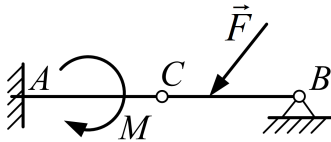


Рис. 3.16

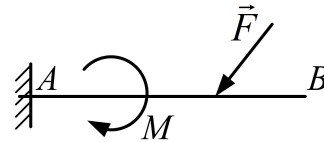


Рис. 3.17

Возможны и другие варианты избавления от «лишних» связей представленной на рис. 3.14 системы (см. рис. 3.18 и рис. 3.19).

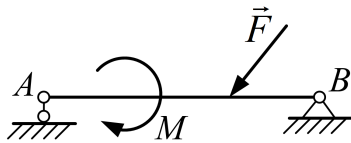


Рис. 3.18

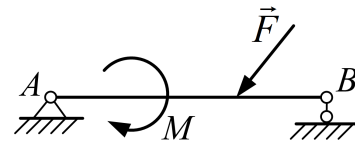


Рис. 3.19

Из рис. 3.14 и рис. 3.16 видно, что *внутренний шарнир уменьшает степень статической неопределимости на единицу*, поскольку позволяет составить дополнительное уравнение равновесия (сумма моментов относительно внутреннего шарнира для одного из тел, входящих в систему, равна нулю).

Степень статической неопределимости определяют следующим образом:

$$N = k - (n + s),$$

где k – число неизвестных; n – число независимых уравнений равновесия, определяемое видом системы сил; s – число внутренних шарниров.

При $N < 0$, если не принять специальных мер, механическая система при действии сил может прийти в движение. Так, система, показанная на рис. 3.20, с $N = 3 - (3 + 1) = -1$ при действии силы P и момента M может двигаться. Она останется в равновесии только в том случае, если P и M будут подчиняться определенному условию.

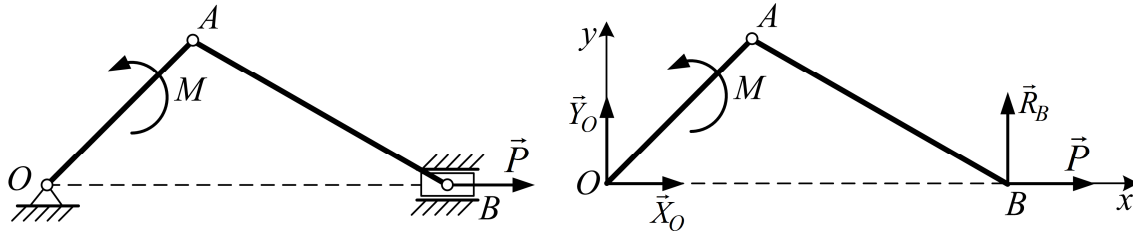


Рис. 3.20

Лекция 4. Приведение системы сил к центру. Центр тяжести

Теорема об изменении главного момента системы сил при переходе к новому центру. Теорема о сохранении эквивалентности систем сил. Приведение системы сил к центру. Частные случаи приведения. Нахождение центральной оси динамического винта. Сложение параллельных сил. Центр системы параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Методы нахождения центра тяжести.

4.1. Приведение системы сил к центру

4.1.1. Теорема об изменении главного момента системы сил при переходе к новому центру

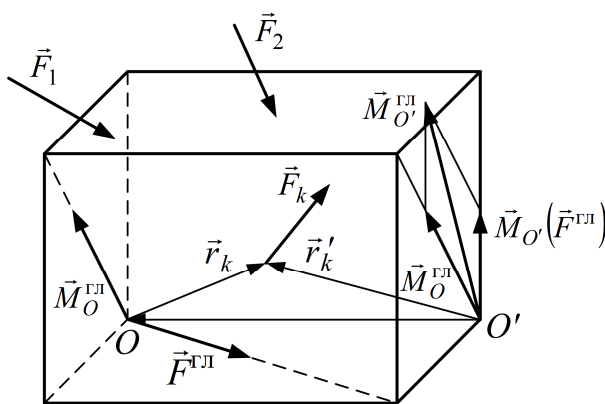


Рис. 4.1

Главный момент системы сил, приложенных к твердому телу, зависит от выбора моментной точки (центра). В случае перехода от одного центра к другому верна следующая теорема.

Теорема об изменении главного момента при переходе к новому центру: главный момент системы сил относительно нового центра равен геометрической сумме главного момента относительно старого центра и момента главного вектора, приложенного в старом центре, относительно нового центра:

$$\vec{M}_{O'}^{\text{гл}} = \vec{M}_O^{\text{гл}} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}^{\text{гл}}. \quad (4.1)$$

Доказательство. По определению главного момента системы сил:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{\text{гл}} &= \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k, \\ \vec{M}_{O'}^{\text{гл}} &= \sum \vec{r}'_k \times \vec{F}_k. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из рис. 4.1 видно, что $\vec{r}'_k = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}_k$. Подставляя это выражение во вторую формулу (4.2), получаем

$$\vec{M}_{O'}^{\text{гл}} = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \sum \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}_k = \vec{M}_O^{\text{гл}} + \overrightarrow{O'O} \times \sum \vec{F}_k = \vec{M}_O^{\text{гл}} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}^{\text{гл}}.$$

Последнее слагаемое можно интерпретировать как вектор-момент относительно точки O' главного вектора, приложенного в точке O . На рис. 4.1 этот вектор-момент обозначен $\vec{M}_{O'}(\vec{F}^{\text{гл}})$.

4.1.2. Теорема о сохранении эквивалентности систем сил

Известно, что эквивалентные системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ и $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m$ имеют равные главные векторы и равные главные моменты относительно некоторого центра.

Рассмотрим теорему, позволяющую понять, сохраняется ли эквивалентность систем сил при переходе к новому центру.

Теорема об эквивалентности двух систем сил: *если две системы сил эквивалентны относительно некоторого центра, то их эквивалентность сохраняется и при переходе к новому центру.*

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что главные моменты двух систем, одинаковые относительно центра O , останутся одинаковыми и относительно центра O' (главные векторы не зависят от центра). С этой целью используем равенство (4.1):

$$\vec{M}_{O'}^{\text{гл}}(\vec{F}) = \vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{F}) + \vec{O'O} \times \vec{F}^{\text{гл}}(\vec{F}), \quad (4.3)$$

$$\vec{M}_{O'}^{\text{гл}}(\vec{Q}) = \vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{Q}) + \vec{O'O} \times \vec{F}^{\text{гл}}(\vec{Q}). \quad (4.4)$$

Правые части равенств (4.3) и (4.4) равны между собой, поэтому равны и их левые части, т.е. $\vec{M}_{O'}^{\text{гл}}(\vec{F}) = \vec{M}_{O'}^{\text{гл}}(\vec{Q})$, что и требовалось доказать.

Следствие. Эта теорема показывает, что для доказательства эквивалентности двух систем сил можно выбирать центр приведения из соображений простоты вычисления главного момента.

4.1.3. Приведение системы сил к центру

Из определения эквивалентных систем следует, что каждой системе сил может быть поставлено в соответствие бесконечное множество систем, ей эквивалентных. Возникает задача выделить из этого множества наиболее простую систему сил, эквивалентную заданной системе сил.

Общее решение задачи о замене данной системы сил другой, ей эквивалентной, заключается в нахождении такой эквивалентной системы, которая состоит из *одной силы*, проходящей через заранее заданную точку (центр приведения), и *одного момента*.

Эта задача решается на основе условий равенства главных векторов и главных моментов эквивалентных систем сил.

Для любой произвольной системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу, можно найти главный вектор и главный момент относительно некоторого центра O :

$$\vec{F}^{\text{гл}} = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O^{\text{гл}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Системе сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ можно поставить в соответствие эквивалентную систему, состоящую из одной силы, равной $\vec{F}^{\text{гл}}$, приложенной в заранее заданном центре приведения, и одного момента, равного геометрической сумме векторов-моментов заданных сил относительно центра приведения: $\vec{M} = \vec{M}_O^{\text{гл}}$.

Приведение системы сил к центру – это операция замены данной системы сил другой, ей эквивалентной, состоящей из одной силы, равной главному вектору и приложенной в заранее выбранном центре приведения, и одного момента, равного главному моменту заданной системы сил относительно этого центра.

4.1.4. Частные случаи приведения

Аналитическая операция приведения системы сил к центру заключается в нахождении проекций главного вектора и главного момента заданной системы сил (относительно центра приведения) на оси декартовой системы координат, начало которой совпадает с центром приведения.

Рассмотрим частные случаи приведения системы сил к центру.

1. $F^{\text{гл}} = 0$, $M_O^{\text{гл}} = 0$. Система сил находится в равновесии. Таковую систему сил называют *системой, эквивалентной нулю*, либо *уравновешенной системой сил*. Уравновешенную систему сил можно добавлять к рассматриваемой системе сил или исключать из нее, т.к. она не изменяет главный вектор и главный момент рассматриваемой системы сил.

2. $F^{\text{гл}} \neq 0$, $M_O^{\text{гл}} = 0$. Подсчитанные проекции главного момента оказались равными нулю:

$$M_{Ox}^{\text{гл}} = M_{Oy}^{\text{гл}} = M_{Oz}^{\text{гл}} = 0.$$

Система приводится к одной силе – *равнодействующей* $\vec{R} = \vec{F}^{\text{гл}}$, линия действия которой проходит через центр приведения O .

3. $F^{\text{гл}} = 0$, $M_O^{\text{гл}} \neq 0$. Подсчитанные проекции главного вектора оказались равными нулю:

$$F_x^{\text{гл}} = F_y^{\text{гл}} = F_z^{\text{гл}} = 0.$$

Система сил приводится к паре сил с моментом $\vec{M}_O^{\text{гл}}$. Момент пары сил не изменяется при переходе к новому центру приведения в соответствии с теоремой об изменении главного момента при переходе к новому центру (4.1).

4. $F^{\text{гл}} \neq 0$, $M_O^{\text{гл}} \neq 0$, $\vec{F}^{\text{гл}} \perp \vec{M}_O^{\text{гл}}$ (рис. 4.2, а). Подсчитанные проекции главного вектора и главного момента подчиняются *условию перпендикулярности векторов*:

$$F_x^{\text{гл}} M_{Ox}^{\text{гл}} + F_y^{\text{гл}} M_{Oy}^{\text{гл}} + F_z^{\text{гл}} M_{Oz}^{\text{гл}} = 0.$$

Покажем, что в этом случае система сил приводится к равнодействующей. Заменяем $\vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}$ парой сил $(\vec{F}_1^{\Gamma\Gamma}, \vec{F}_2^{\Gamma\Gamma})$ (рис. 4.2, б), причем $\vec{F}_1^{\Gamma\Gamma} = -\vec{F}_2^{\Gamma\Gamma} = \vec{F}^{\Gamma\Gamma}$.

Система $(\vec{F}^{\Gamma\Gamma}, \vec{F}_2^{\Gamma\Gamma})$ эквивалентна нулю и поэтому исключается из рассмотрения. Остается одна сила $\vec{F}_1^{\Gamma\Gamma}$. Следовательно, заданная система эквивалентна одной силе, т.е. приводится к равнодействующей $\vec{R} = \vec{F}^{\Gamma\Gamma}$, приложенной в точке O_1 (рис. 4.2, в). Ее линия действия отстоит от центра приведения O на расстоянии $h = \frac{M_O^{\Gamma\Gamma}}{F^{\Gamma\Gamma}}$.

Линия действия равнодействующей определяется следующими уравнениями:

$$M_{Ox}^{\Gamma\Gamma} - yF_z^{\Gamma\Gamma} + zF_y^{\Gamma\Gamma} = M_{Oy}^{\Gamma\Gamma} - zF_x^{\Gamma\Gamma} + xF_z^{\Gamma\Gamma} = M_{Oz}^{\Gamma\Gamma} - xF_y^{\Gamma\Gamma} + yF_x^{\Gamma\Gamma} = 0.$$

Линия действия равнодействующей не зависит от выбора центра приведения. В этом заключается различие между равнодействующей (если таковая имеется) и главным вектором. Главный вектор не имеет в теле определенной линии действия, поскольку его положение зависит от выбора центра приведения.

5. $F^{\Gamma\Gamma} \neq 0$, $M_O^{\Gamma\Gamma} \neq 0$ и векторы $\vec{F}^{\Gamma\Gamma}$ и $\vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}$ не перпендикулярны, т.е.

$$F_x^{\Gamma\Gamma} M_{Ox}^{\Gamma\Gamma} + F_y^{\Gamma\Gamma} M_{Oy}^{\Gamma\Gamma} + F_z^{\Gamma\Gamma} M_{Oz}^{\Gamma\Gamma} \neq 0.$$

В этом случае система сил приводится к *динамическому винту*.

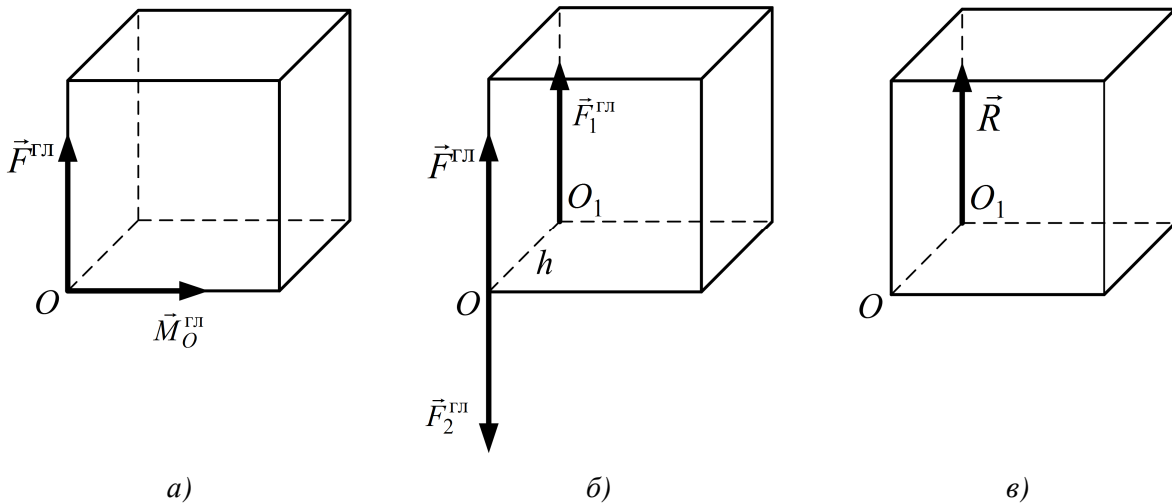


Рис. 4.2

4.1.5. Нахождение центральной оси динамического винта

Пусть векторы $\vec{F}^{\text{гл}}$ и $\vec{M}_O^{\text{гл}}$ образуют некоторый угол $\alpha \neq 90^\circ$. Разложим вектор $\vec{M}_O^{\text{гл}}$ на два вектора \vec{M}_1 и \vec{M}_2 как показано на рис. 4.3. В свою очередь, момент \vec{M}_2 представим в виде пары сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) , для которой $F_1 = F_2 = F^{\text{гл}}$. Система двух сил $(\vec{F}^{\text{гл}}, \vec{F}_2)$ эквивалентна нулю, и ее можно удалить. Остаются сила \vec{F}_1 и момент \vec{M}_1 , направленные по одной прямой. Эта прямая и является центральной осью динамического винта. Если сила \vec{F}_1 и момент \vec{M}_1 направлены в одну сторону, то имеем *правый динамический винт*, а если в разные, то – *левый*.

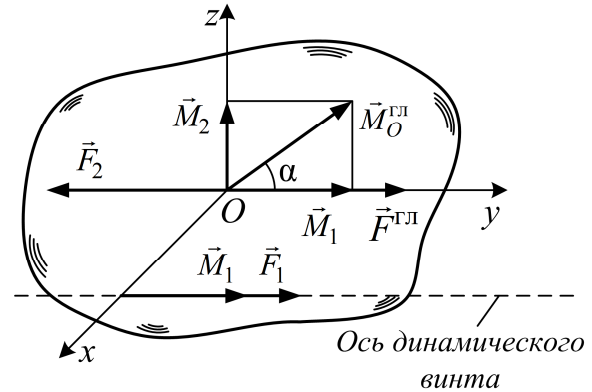


Рис. 4.3

Если в качестве точки приведения выбрать любую точку на центральной оси, то получим главный вектор \vec{F}_1 и главный момент \vec{M}_1 , направленные вдоль этой оси.

Таким образом, простейшими видами систем сил являются *сила, момент и динамический винт*. Любая система сил, не находящаяся в равновесии, может быть приведена к одному из этих трех видов.

4.2. Центр тяжести

4.2.1. Сложение параллельных сил

Система параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную заданным силам и равную по модулю арифметической сумме модулей сил составляющих. Докажем справедливость этого утверждения.

Пусть силы параллельны оси z (рис. 4.4, а). Приведем заданную систему сил к центру O . При этом получим $\vec{F}^{\text{гл}} = \sum \vec{F}_i$ и $\vec{M}_O^{\text{гл}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. Силы параллельны оси z , поэтому вектор $\vec{M}_O^{\text{гл}}$ расположен в плоскости xOy , т.е. $\vec{F}^{\text{гл}} \perp \vec{M}_O^{\text{гл}}$ (рис. 4.4, б).

В этом случае система сил приводится к равнодействующей \vec{R} , равной $\vec{F}^{\text{гл}}$ и удаленной от центра O на расстояние $h = \frac{M_O^{\text{гл}}}{F^{\text{гл}}}$ (рис. 4.4, в; г).

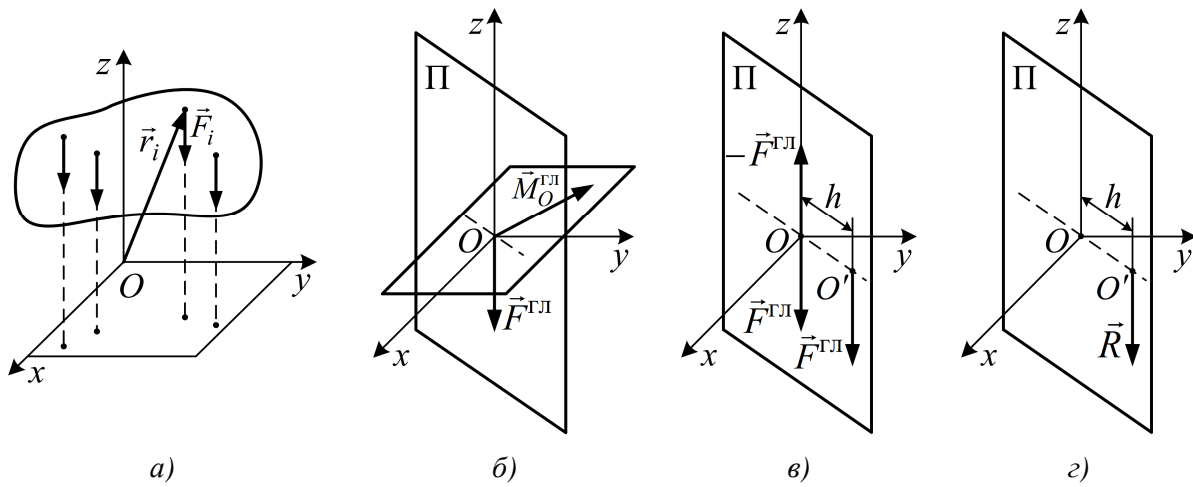


Рис. 4.4

Сила \vec{R} лежит в плоскости Π , перпендикулярной вектору $\vec{M}_O^{\text{гл}}$.

Поскольку все силы имеют одинаковое направление, модуль главного вектора равен арифметической сумме модулей сил, составляющих систему. Поскольку $\vec{R} = \vec{F}^{\text{гл}}$, то, следовательно, и модуль равнодействующей равен арифметической сумме модулей заданных сил.

4.2.2. Центр системы параллельных сил

Центр системы $\{\vec{F}\}$ параллельных сил – это точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы $\{\vec{F}\}$ и любой другой системы, полученной из данной путем поворота всех сил \vec{F}_i ($i = 1, \dots, n$) на один и тот же угол в одном и том же направлении (рис. 4.5).

Определим координаты точки C – центра системы параллельных сил. Введем орт \vec{e} , параллельный заданным силам. Тогда $\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}$, $\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}$, ..., $\vec{F}_n = F_n \vec{e}$, а равнодействующая этой системы равна

$$\vec{R} = \sum F_i \vec{e}. \quad (4.5)$$

Из условия эквивалентности систем сил следует

$$M_C^{\text{гл}}(\vec{R}) = M_C^{\text{гл}}(\vec{F}), \quad \vec{r}_C \times \vec{R} = \sum \vec{r}_i \times F_i \vec{e}.$$

С учетом (4.5) получаем

$$\vec{r}_C \times \sum F_i \vec{e} = \sum \vec{r}_i \times F_i \vec{e}.$$

Учитывая, что $\sum F_i$ и F_i – скалярные множители, имеем:

$$\sum F_i \vec{r}_C \times \vec{e} = (\sum F_i \vec{r}_i) \times \vec{e}.$$

Орт \vec{e} как не зависящий от индекса i суммирования может быть вынесен за знак суммы:

$$(\sum F_i \vec{r}_C) \times \vec{e} = (\sum F_i \vec{r}_i) \times \vec{e},$$

следовательно,

$$\sum F_i \vec{r}_C = \sum F_i \vec{r}_i, \quad (\sum F_i) \vec{r}_C = \sum F_i \vec{r}_i, \quad \vec{r}_C = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}.$$

В проекциях на оси координат имеем:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}.$$

Орт \vec{e} не вошел в полученные формулы. Следовательно, координаты центра системы параллельных сил не изменятся, если все силы системы повернуть на один и тот же угол α (рис. 4.5).

4.2.3. Центр тяжести твердого тела

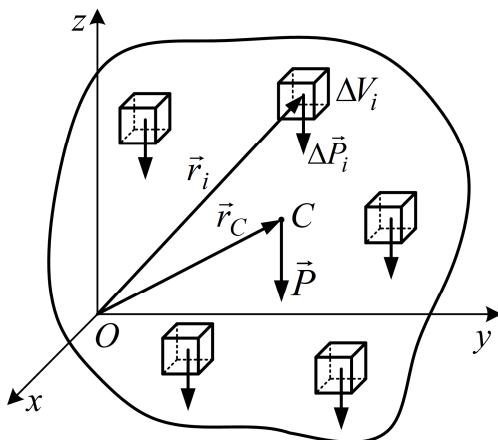


Рис. 4.6

Если твердое тело мысленно разбить на отдельные части объемом ΔV_i и массой Δm_i (рис. 4.6), то на каждую из этих частей будет действовать сила тяжести ΔP_i , направленная к центру Земли. Для тел, размеры которых несоизмеримо меньше размеров Земли, силы тяжести отдельных частей тела можно с большой точностью считать параллельными (угол между направлениями сил тяжести двух точек, расположенных на поверхности Земли на расстоянии 100 м друг от друга по меридиану, равен примерно $0,0009^\circ$).

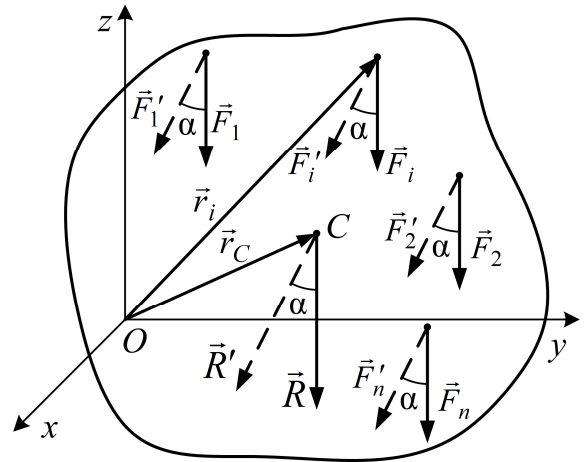


Рис. 4.5

Центр системы параллельных сил тяжести, приложенных к отдельным элементарным частям тела, называют **центром тяжести тела**. В этом центре (точка C на рис. 4.6), приложена сила тяжести твердого тела.

Центр тяжести может находиться как в пределах данного твердого тела, совпадая с одной из его точек (рис. 4.6), так и вне его (например, центр тяжести изогнутой проволоки, обруча и др.).

Для определения положения центра тяжести воспользуемся выведенной выше формулой для определения центра параллельных сил (считая, что твердое тело разбито на n частей):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_i \Delta P_i}{\sum \Delta P_i},$$

где \vec{r}_C – радиус-вектор центра тяжести тела;

\vec{r}_i – радиус-вектор точки приложения силы ΔP_i .

Сумма в знаменателе формулы – это величина силы тяжести или вес тела: $\sum \Delta P_i = P$.

Если рассматривается *однородное* твердое тело плотностью ρ , то масса i -й части тела равна $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$, где ΔV_i – объем i -й части. Тогда вес i -й части $\Delta P_i = \rho g \Delta V_i$.

Для однородного тела $\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_i \Delta V_i}{V}$, или в проекциях на декартовы оси координат: $x_C = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{V}$, $y_C = \frac{\sum y_i \Delta V_i}{V}$, $z_C = \frac{\sum z_i \Delta V_i}{V}$, где V – объем тела.

В пределе при $n \rightarrow \infty$ координаты центра тяжести тела выражаются с помощью интегралов:

$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dv, \quad y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dv, \quad z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dv,$$

где dv – объем элемента тела.

Если твердое тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x ds, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y ds,$$

где S – площадь пластины;

ds – площадь элемента пластины.

Координаты центра тяжести пространственной однородной линии определяют по формулам:

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, \quad z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl,$$

где L – длина линии;
 dl – длина элемента линии.

4.2.4. Методы нахождения центра тяжести

Рассмотрим методы нахождения центра тяжести твердого тела.

1. Использование симметрии. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, ось симметрии или центр симметрии, то центр тяжести тела лежит соответственно в плоскости симметрии, на оси симметрии или в центре симметрии.

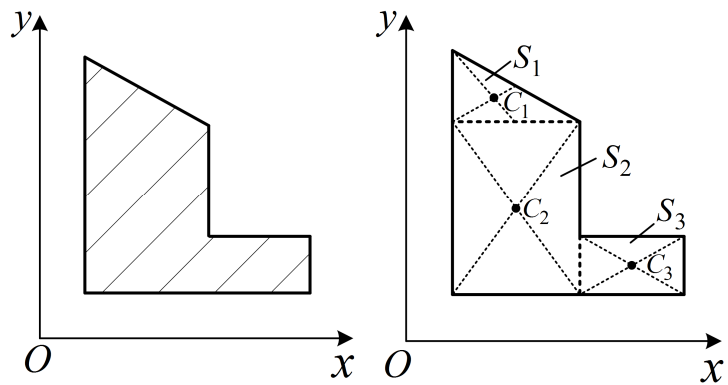
2. Метод разбиения. В практических приложениях часто приходится определять центры тяжести тел, состоящих из отдельных частей правильной геометрической формы, положение центров тяжести которых заранее известно.

Рассмотрим пример применения метода разбиения. «Разобьем» плоскую пластину (рис. 4.7, а) на три части (рис. 4.7, б), площади S_1 , S_2 , S_3 и центры $C_1(x_{C_1}; y_{C_1})$, $C_2(x_{C_2}; y_{C_2})$, $C_3(x_{C_3}; y_{C_3})$ тяжести которых легко определяются.

Получаем координаты центра тяжести всей плоской пластины с помощью метода разбиения:

$$x_C = \frac{x_{C_1} S_1 + x_{C_2} S_2 + x_{C_3} S_3}{S},$$

$$y_C = \frac{y_{C_1} S_1 + y_{C_2} S_2 + y_{C_3} S_3}{S},$$



а)

б)

где S – площадь плоской фигуры, $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Рис. 4.7

3. Метод дополнения (метод отрицательных масс или отрицательных площадей). Этот метод является частным случаем метода разбиения и используется в случаях, когда тело имеет пустоты (отверстия, окна и т.п.).

Рассмотрим пример определения центра тяжести плоской пластины с отверстием (рис. 4.8). Дополним площадь пластины до целого прямоугольника и будем считать его телом 1, имеющим площадь S_1 . Отверстие будем считать телом 2 с отрицательной площадью $(-S_2)$.

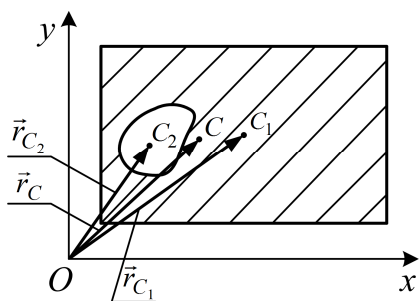


Рис. 4.8

Координаты центра тяжести пластины с отверстием определяются следующими формулами:

$$x_C = \frac{x_{C_1} S_1 + x_{C_2} (-S_2)}{S_1 + (-S_2)}, \quad y_C = \frac{y_{C_1} S_1 + y_{C_2} (-S_2)}{S_1 + (-S_2)},$$

где x_{C_1} , y_{C_1} – координаты центра тяжести прямоугольника без выреза; x_{C_2} , y_{C_2} – координаты центра «тяжести» отверстия.

4. Экспериментальные методы. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации определяют экспериментально.

Одним из экспериментальных методов является *метод подвешивания*. При этом методе тело несколько раз подвешивают на нити или тросе за различные его точки. Направление нити каждый раз совпадает с направлением силы тяжести. Центр тяжести лежит на пересечении прямых, являющихся продолжением нитей подвеса (рис. 4.9).

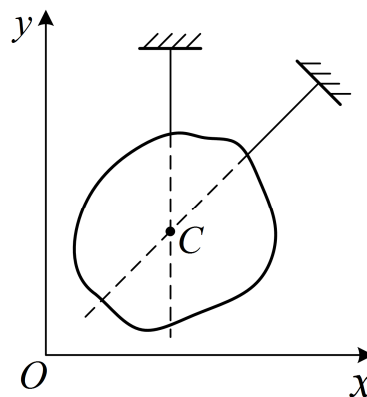


Рис. 4.9

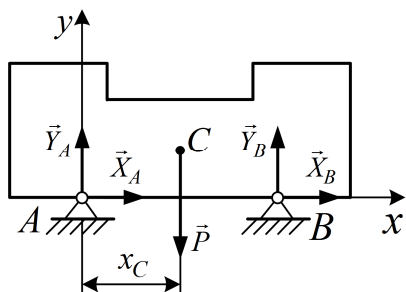


Рис. 4.10

Также используется *метод взвешивания*. Для примера определим абсциссу центра тяжести станины станка, установленной на опоры A и B, одна из которых (например, опора B) оснащена динамометром (рис. 4.10). Реакцию опоры B определяют по показанию динамометра и при известном весе станины определяют расстояние x_C от опоры A до линии действия силы тяжести:

$$\sum M_A = 0, \quad -Px_C + Y_B AB = 0, \quad x_C = \frac{Y_B AB}{P}.$$

2. КИНЕМАТИКА

Лекция 5. Кинематика точки

Способы задания движения точки. Скорость точки при различных способах задания движения. Ускорение точки при различных способах задания движения.

5.1. Способы задания движения точки

Задать движение точки – значит дать информацию, с помощью которой можно определить положение точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета.

В кинематике применяют три способа задания движения точки: *векторный*, *координатный* и *естественный*.

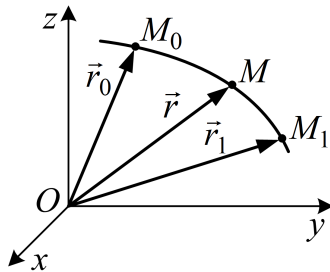


Рис. 5.1

Векторный способ. При векторном способе положение точки определяется радиусом-вектором точки, являющимся функцией времени, в заданной системе отсчета (рис. 5.1):

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) – *векторное уравнение движения материальной точки* в выбранной системе отсчета.

Если последовательно соединить концы радиус-вектора, то получим непрерывную линию, описываемую точкой в пространстве. Эту линию называют **траекторией точки**.

Как известно, линия, последовательно соединяющая концы вектора, построенного из одной точки, называется *годографом* этого вектора. Следовательно, траектория точки – это годограф радиуса-вектора $\vec{r}(t)$.

Координатный способ. При координатном способе задаются координаты движущейся точки как функции времени в заданной системе отсчета:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (5.2)$$

Уравнения (5.2) – *уравнения движения материальной точки* в координатной форме в выбранной системе отсчета. Данные уравнения называются *кинематическими уравнениями движения точки*.

Одновременно уравнения (5.2) являются *параметрическими уравнениями траектории*. Для перехода от параметрических уравнений траектории к уравнениям, дающим непосредственную связь между координатами, следует исключить из уравнений параметр t , например:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow F(x, y) = 0 \text{ или } y = f(x).$$

Координатный способ неразрывно связан с векторным способом, т.к. координаты x, y, z точки можно рассматривать как координаты конца радиус-вектора этой точки

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (5.3)$$

Естественный способ. При естественном способе задаются:

- траектория точки;
- начало отсчета на траектории;
- положительное направление на траектории;
- закон изменения дуговой координаты, определяющей положение точки на траектории (рис. 5.2): $s = s(t)$.

Дуговая координата может быть как положительной, так и отрицательной.

Естественный способ задания движения точки удобно использовать, если траектория точки заранее известна.

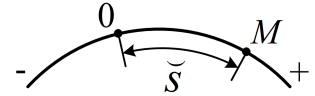


Рис. 5.2

5.2. Скорость точки при различных способах задания движения

Векторный способ. Пусть в момент времени t положение точки определяется радиусом-вектором \vec{r} , а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ – радиусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ (рис. 5.3). Отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ характеризует скорость изменения положения точки и называется **средней скоростью точки** за время Δt :

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

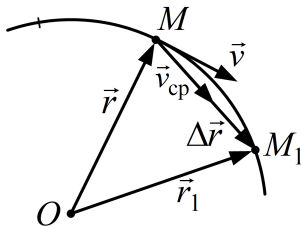


Рис. 5.3

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ является скоростью точки в данный момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Скорость точки – кинематическая мера движения точки, равная производной по времени от радиуса-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчета:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Известно, что производная по времени от вектора – вектор, направленный по касательной к годографу дифференцируемого вектора. Годографом дифференцируемого вектора \vec{r} служит траектория точки, поэтому вектор скорости \vec{v} направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

Как известно из математики, предельное положение секущих – это касательная. Поэтому скорость точки как предельное положение вектора средней скорости направлена по касательной к траектории.

Единица измерения скорости точки в системе СИ – м/с.

Координатный способ. Представим радиус-вектор точки через ее координаты (5.3) и определим скорость этой точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}.$$

Вектор скорости точки можно записать через проекции на декартовы оси координат:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

$$\text{Отсюда } v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Модуль вектора скорости точки равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

а направляющие косинусы вектора скорости вычисляются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}.$$

Естественный способ. Пусть в момент времени t точка находилась на заданной траектории в положении M с дуговой координатой s (рис. 5.4), а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ – в положении M_1 с дуговой координатой $s_1 = s + \Delta s$.

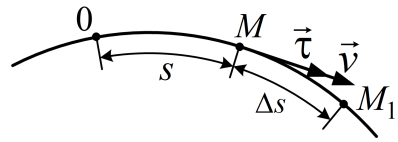


Рис. 5.4

Тогда величина средней скорости точки M за время Δt :

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ является скоростью точки M в данный момент времени:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Как было показано выше, скорость точки направлена по касательной к траектории. Рассмотрим орт $\vec{\tau}$ касательной, направленный из точки M в сторону возрастания дуговой координаты s . Тогда вектор скорости определяется следующей формулой:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}.$$

5.3. Ускорение точки при различных способах задания движения

Векторный способ. Среднее ускорение точки характеризует изменение вектора ее скорости за промежуток времени Δt :

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ является ускорением точки в данный момент времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Ускорение точки – мера изменения скорости точки, равная производной по времени от скорости этой точки или второй производной от радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Вектор среднего ускорения лежит в плоскости, образованной векторами \vec{v} , \vec{v}_1 , $\Delta \vec{v}$ (см. заштрихованную плоскость на рис. 5.5, а). Предельное положение этой плоскости при $\Delta t \rightarrow 0$ называется *соприкасающейся плоскостью* к пространственной кривой в точке M . Следовательно, вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости и параллелен касательной к годографу вектора скорости (рис. 5.5, б).

При прямолинейном движении вектор \vec{a} направлен по прямой. Если точка движется по плоской кривой, то вектор \vec{a} лежит в этой же плоскости и направлен в сторону ее вогнутости. Если траекторией точки является пространственная кривая (кривая двойкой кривизны), то вектор \vec{a} лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

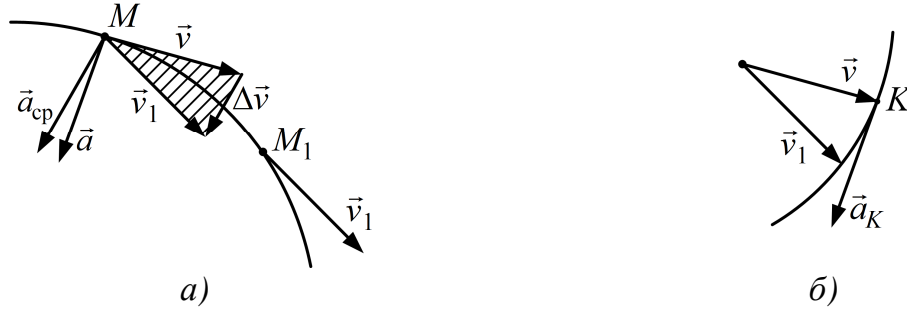


Рис. 5.5

Координатный способ. Вектор ускорения точки можно представить в следующем виде:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

или

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Проекции ускорения точки на декартовы оси координат равны:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Модуль вектора ускорения точки определяется следующим образом:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Направляющие косинусы вектора ускорения равны:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Естественный способ. Поскольку $\vec{v} = s\vec{\tau}$, имеем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(s\vec{\tau}) = \dot{s}\vec{\tau} + s\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{s}\vec{\tau} + s\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{ds} = \dot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

или

$$\vec{a} = \dot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}, \quad (5.4)$$

где $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, \vec{n} – единичный вектор главной нормали, ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Первая составляющая выражения (5.4), характеризующая изменение величины скорости и направленная по касательной к траектории, называется **касательным ускорением точки** и обозначается \vec{a}^τ (рис. 5.6):

$$\vec{a}^\tau = \dot{s} \vec{\tau}.$$

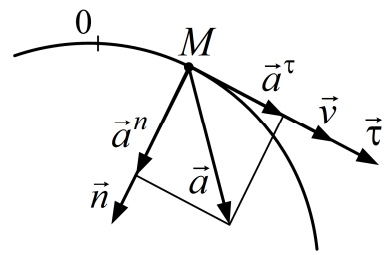


Рис. 5.6

Вторая составляющая выражения (5.4), характеризующая изменение направления вектора скорости и направленная по главной нормали к траектории в сторону ее вогнутости, называется **нормальным ускорением точки** и обозначается \vec{a}^n (рис. 5.6):

$$\vec{a}^n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}.$$

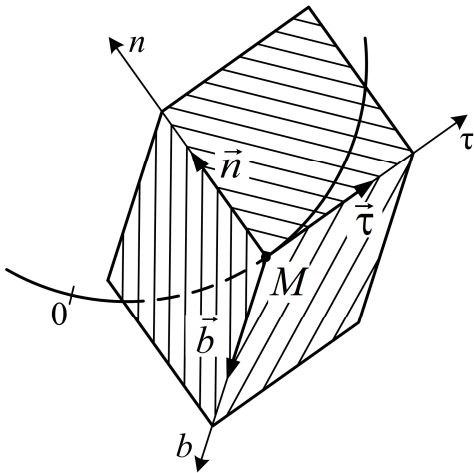


Рис. 5.7

В каждой точке пространственной кривой можно построить *естественный трехгранник* (рис. 5.7) с осями τ (касательная), n (главная нормаль), b (бинормаль). Любой вектор, в том числе и вектор ускорения, можно разложить по осям естественного трехгранника:

$$\vec{a} = a^\tau \vec{\tau} + a^n \vec{n} + a^b \vec{b},$$

где $a^\tau = \dot{v} = \ddot{s}$; $a^n = \frac{v^2}{\rho}$; $a^b = 0$.

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле:

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2}.$$

Лекция 6. Поступательное и вращательное движения твердого тела

Поступательное движение твердого тела. Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела. Равномерное и равнопеременное вращение. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторные формулы для скоростей и ускорений точек вращающегося тела.

6.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение твердого тела – движение, при котором любая прямая, связанная с твердым телом, остается параллельной своему первоначальному положению во все время движения.

Примерами поступательно движущихся тел могут служить движение вагона по прямолинейному пути, спуск кабины лифта.

Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки имеют одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и векторно-равные в каждый момент времени скорости и ускорения.

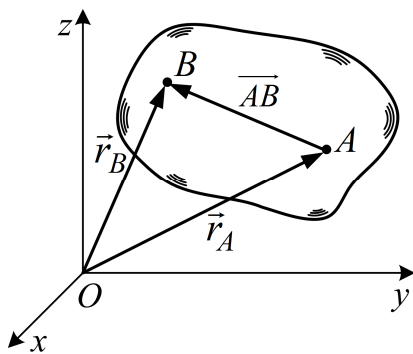


Рис. 6.1

Доказательство. Пусть твердое тело совершает поступательное движение (рис. 6.1). Выберем в теле произвольные точки A и B с радиус-векторами \vec{r}_A и \vec{r}_B . По определению поступательного движения вектор \overrightarrow{AB} есть вектор, постоянный по величине и направлению. Из рис. 6.1 видно, что

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}. \quad (6.1)$$

Поскольку $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ определяет траекторию точки A , а $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$ – траекторию точки B , то последняя может быть получена сдвигом траектории точки A на постоянный вектор \overrightarrow{AB} . Следовательно, траектории точек A и B при наложении совпадают.

Дифференцируя выражение (6.1) по времени и учитывая, что вектор \overrightarrow{AB} имеет постоянную длину и направление, устанавливаем равенство скоростей:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A.$$

Таким образом, вектор скорости поступательного движения тела можно приложить в любой точке тела. Иными словами, *вектор скорости – свободный вектор*.

При повторном дифференцировании выражения (6.1) по времени получаем:

$$\frac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

Доказанная теорема позволяет кинематику поступательно движущегося тела свести к кинематике одной его точки. Уравнения движения этой точки одновременно являются **уравнениями поступательного движения твердого тела**:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

6.2. Вращательное движение твердого тела

Вращательное движение твердого тела – движение, при котором две точки тела остаются неподвижными во все время движения. Прямую, проходящую через эти точки, называют **осью вращения**. Все точки оси вращения также неподвижны. Все другие точки тела описывают окружности, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

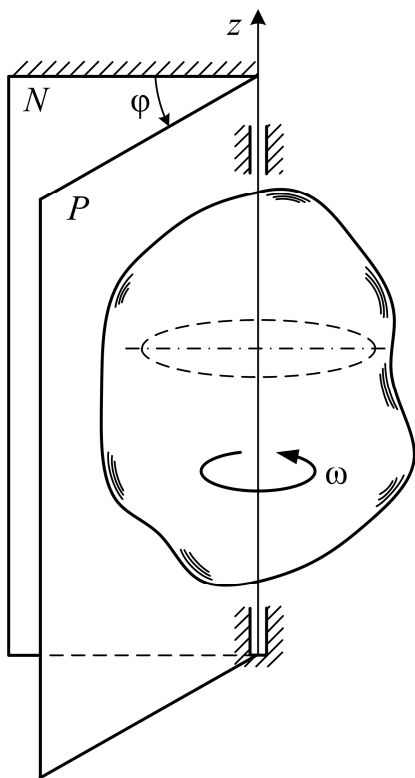


Рис. 6.2

Примерами вращательного движения твердого тела могут служить движение вала, установленного в неподвижных опорах; поворот двери, вокруг оси, проходящей через ее петли.

Пусть твердое тело совершает вращательное движение вокруг оси z (рис. 6.2). Через ось z проведем неподвижную плоскость N и подвижную плоскость P , жестко связанную с вращающимся телом.

Угол φ между этими плоскостями в произвольный момент времени однозначно определяет положение твердого тела относительно неподвижной системы отсчета, связанной с неподвижной плоскостью N :

$$\varphi = \varphi(t). \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) является **уравнением вращательного движения твердого тела**.

Угол φ принимается положительным, если он отсчитывается от плоскости N против часовой стрелки при наблюдении с положительного направления оси вращения z .

Угол φ измеряется в радианах (безразмерная величина).

6.2.1. Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела

Характеристиками вращательного движения тела являются *угловая скорость* и *угловое ускорение*.

Вращательное движение тела описывается угловой скоростью и угловым ускорением.

Пусть в момент времени t угол поворота был φ , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ стал $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$. Отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ характеризует скорость изменения угла поворота за промежуток времени Δt и называется *средней угловой скоростью вращающегося тела* за время Δt :

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ является *угловой скоростью вращающегося тела* в данный момент времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Вектор угловой скорости твердого тела – вектор, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда оно видно происходящим против хода часовой стрелки, с модулем, равным модулю угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k},$$

где \vec{k} – единичный вектор оси вращения.

Угловая скорость вращения измеряется в радианах в секунду или в оборотах в минуту.

Если тело вращается со скоростью n об/мин, то угловая скорость ω рад/с определяется по следующей формуле:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ [рад/с]}.$$

Мерой изменения угловой скорости является *угловое ускорение*.

Зная угловую скорость ω в данный момент t и $\omega + \Delta\omega$ – в момент $t_1 = t + \Delta t$, можно найти *среднее угловое ускорение вращающегося тела* за промежуток времени Δt :

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ является *угловым ускорением вращающегося тела* в данный момент времени:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Направление угловой скорости и углового ускорения можно изображать круговыми стрелками. Круговая стрелка ω показывает направление вращения тела. На рис. 6.3 тело вращается против часовой стрелки. Круговая стрелка ε показывает, является ли вращение тела *ускоренным* или *замедленным*. Если вращение ускоренное, то стрелки для ω и ε имеют одинаковые направления (рис. 6.3, а), а если замедленное – противоположные (рис. 6.3, б).

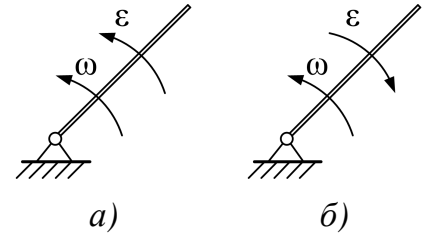


Рис. 6.3

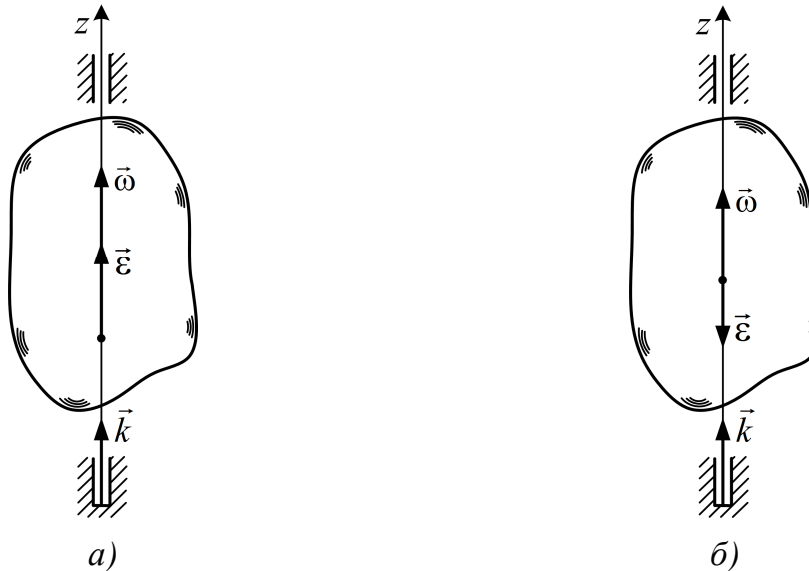


Рис. 6.4

Вектор углового ускорения твердого тела – вектор, направленный по оси вращения и равный производной от вектора угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d(\dot{\varphi} \vec{k})}{dt} = \ddot{\varphi} \vec{k}.$$

Точка приложения вектора $\vec{\omega}$ на оси вращения произвольна. Следовательно, *вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости тела – скользящий вектор*.

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ также направлен по оси вращения и может быть приложен в любой ее точке.

Зная направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, легко показать характер вращательного движения:

- вращательное движение *ускоренное*, если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ направлены в одну сторону (рис. 6.4, *a*);
- вращательное движение *замедленное*, если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ направлены в противоположные стороны (рис. 6.4, *б*).

6.2.2. Равномерное и равнопеременное вращение

Если угловая скорость постоянна, т.е. $\omega = \text{const}$, то вращение называют ***равномерным***. В этом случае $\epsilon = 0$, а угол поворота определяется следующим образом:

$$\varphi = \int \omega dt = \omega t + C.$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий: при $t = 0$ угол поворота $\varphi = \varphi_0$, следовательно, $C = \varphi_0$, и уравнение равномерного вращения имеет вид:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Если угловое ускорение постоянно, т.е. $\epsilon = \text{const}$, то такое вращение называют ***равнопеременным***. В этом случае

$$\begin{aligned}\omega &= \int \epsilon dt = \epsilon t + C_1, \\ \varphi &= \int \omega dt = \int (\epsilon t + C_1) dt = \frac{\epsilon t^2}{2} + C_1 t + C_2.\end{aligned}$$

При $t = 0$ угловая скорость $\omega = \omega_0$, угол поворота $\varphi = \varphi_0$, поэтому $C_1 = \omega_0$, $C_2 = \varphi_0$. Угловая скорость и закон движения при равнопеременном вращении тела:

$$\begin{aligned}\omega &= \epsilon t + \omega_0, \\ \varphi &= \frac{\epsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0.\end{aligned}$$

6.2.3. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Определим скорость произвольной точки M тела (рис. 6.5), вращающегося вокруг неподвижной оси в соответствии с уравнением $\varphi = \varphi(t)$.

Точка M перемещается по окружности радиуса R согласно закону

$$\overset{\cup}{S} = \overset{\cup}{M_0 M} = R\varphi,$$

причем M_0 – положение точки при $t=0$, а M – положение точки в момент времени t , который соответствует повороту тела на угол φ .

Движение точки M задано естественным способом: известна траектория (окружность радиуса R), начало отсчета (точка M_0), положительное направление движения по траектории (в направлении угла φ) и закон движения по траектории $S = R\varphi$. Тогда скорость точки M равна

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R\varphi)}{dt} = R\omega$$

и направлена по касательной к окружности.

Касательное (тангенциальное) ускорение точки M равно

$$a^\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\varepsilon$$

и направлено в ту же сторону, что и скорость точки, если вращение ускоренное и в противоположную – если замедленное.

Нормальное ускорение точки всегда направлено к оси вращения и определяется по формуле:

$$a^n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Поскольку в данном случае $\rho = R$, а $v = \omega R$, то имеем

$$a^n = R\omega^2.$$

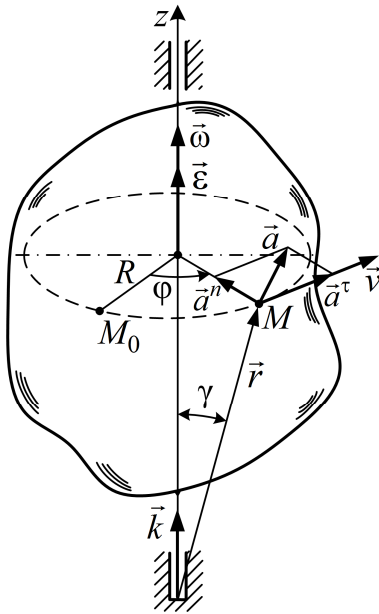


Рис. 6.5

Полное ускорение точки M равно

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (6.3)$$

и направлено по диагонали параллелограмма, построенного на касательном и нормальном ускорениях как на сторонах (рис. 6.5).

6.2.4. Векторные формулы для скоростей и ускорений точек вращающегося твердого тела

Получим *векторные формулы* для скоростей и ускорений точек вращающегося тела.

Представим угловую скорость в виде вектора $\vec{\omega}$, идущего по оси вращения, модуль которого равен $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$, а направление выбрано так, чтобы, глядя с конца вектора $\vec{\omega}$, видеть вращение тела против часовой стрелки (рис. 6.5).

Положение произвольной точки M определим радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из произвольной точки оси вращения (рис. 6.5).

Модуль скорости определяется следующей формулой:

$$v = R|\vec{\omega}| = |\vec{r}||\vec{\omega}|\sin \gamma = |\vec{\omega} \times \vec{r}|.$$

Векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{r}$ – это вектор, перпендикулярный плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\omega}$ и \vec{r} и направленный в сторону, откуда поворот от $\vec{\omega}$ к \vec{r} на наименьший угол происходит против часовой стрелки. Этот вектор направлен по касательной к окружности радиусом R в сторону вращения тела (рис. 6.5).

Таким образом, *вектор скорости точки вращающегося тела равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор точки, проведенный из любой точки оси вращения:*

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (6.4)$$

Формула (6.4) называется **формулой Эйлера**.

Модуль вектора скорости точки M равен

$$v = \omega r \sin \gamma = \omega R.$$

Вектор скорости \vec{v} направлен перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и \vec{r} , т.е. по касательной к окружности радиусом R в сторону вращения тела (рис. 6.5).

Векторные формулы для определения ускорений точки M получим путем дифференцирования выражения (6.4) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

или

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (6.5)$$

Первое слагаемое в формуле (6.5) является касательным ускорением точки M , а второе – нормальным ускорением точки M :

$$\vec{a}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}^n = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Модули этих ускорений определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a^{\tau} &= \varepsilon r \sin \gamma = \varepsilon R, \\ a^n &= \omega v \sin 90^{\circ} = \omega^2 R. \end{aligned}$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси ускорение точки этого тела равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^n.$$

Модуль ускорения определяется по формуле (6.3).

Лекция 7. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

Уравнения плоскопараллельного движения твердого тел. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Определение скорости по уравнениям движения точки. Определение скорости по векторной формуле. Определение скорости с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС). Определение скорости с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек. Определение ускорений точек плоской фигуры.

7.1. Уравнения плоскопараллельного движения твердого тел

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела – движение, при котором все точки тела описывают плоские траектории, лежащие в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Плоскопараллельное движение совершает, например, колесо, катящееся по прямолинейному рельсу, кривошипно-шатунный механизм.

Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси является частным случаем плоского движения, поскольку все точки тела описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Поступательное движение тела также является частным случаем плоскопараллельного только тогда, когда траекториями его точек служат плоские кривые.

Покажем, что изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к изучению движения плоской фигуры (сечения S) в ее плоскости (рис. 7.1).

Пусть твердое тело (рис. 7.1) совершает плоскопараллельное движение, причем все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных неподвижной плоскости N . Рассечем тело плоскостью P , параллельной плоскости N , получив в сечении плоскую фигуру S , которая во время движения тела будет оставаться в плоскости P .

Выделим в этом теле отрезок AB , перпендикулярный плоскости N . При плоскопараллельном движении тела отрезок AB остается параллельным самому себе и, следовательно, совершает поступательное движение. Все точки этого отрезка имеют одинаковые траектории и равные скорости и ускорения. Следовательно, для описания движения отрезка AB достаточно знать движение одной его точки, например, точки M . Рассматриваемое тело можно представить как совокупность отрезков CD , EF и др. (рис. 7.1), перпендикулярных плоскости N , движение которых описывается движением точек M_1 , M_2 и др., лежащих в сечении S .

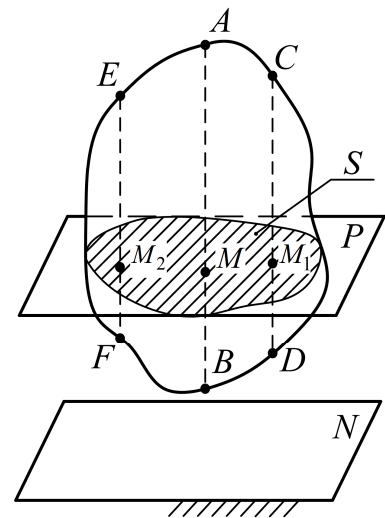


Рис. 7.1

Рассмотрим движение плоской фигуры S в ее плоскости (рис. 7.2). Положение фигуры в неподвижной плоскости xOy определяется положением любого отрезка, например, отрезка AB фигуры S . Положение отрезка AB на

плоскости xOy можно задать координатами x, y одной из его точек (например, точки A) и углом φ , который составляет вектор \overrightarrow{AB} с осью x .

Угол φ считается положительным, если поворот оси x вокруг точки A до совмещения с вектором \overrightarrow{AB} происходит против часовой стрелки. При движении тела переменные x_A, y_A, φ являются функциями времени t :

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \quad (7.1)$$

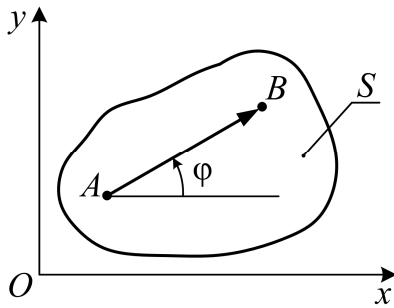


Рис. 7.2

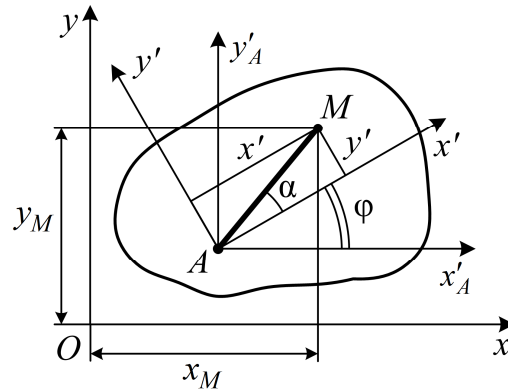


Рис. 7.3

Уравнения (7.1) являются **уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела**.

Зная уравнения движения фигуры S , можно записать уравнения движения любой ее точки, например, точки M (рис. 7.3):

$$\begin{cases} x_M = x_A + AM \cos(\alpha + \varphi), \\ y_M = y_A + AM \sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_M = x_A + AM \cos \alpha \cos \varphi - AM \sin \alpha \sin \varphi, \\ y_M = y_A + AM \sin \alpha \cos \varphi + AM \cos \alpha \sin \varphi. \end{cases}$$

В подвижной системе $x'Ay'$, жестко связанной с фигурой S , точка M имеет координаты:

$$\begin{cases} x' = AM \cos \alpha, \\ y' = AM \sin \alpha. \end{cases}$$

Учитывая эти выражения, получаем уравнения движения произвольной точки M плоской фигуры:

$$\begin{cases} x_M = x_A + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y_M = y_A + y' \cos \varphi + x' \sin \varphi. \end{cases}$$

7.2. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения

Пусть известны два положения плоской фигуры – I и II в моменты времени t_1 и t_2 , соответственно (рис. 7.4). Как в действительности происходило перемещение фигуры из положения I в положение II – мы не знаем. Но это перемещение можно осуществить с помощью двух движений: поступательного с выбранной точкой (полюсом) и вращательного вокруг этого полюса.

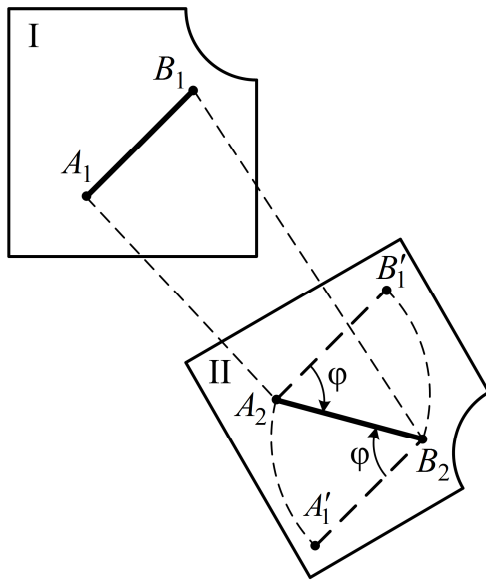


Рис. 7.4

Выберем в качестве полюса точку A . Тогда, поступательно перемещая фигуру, совмещаем A_1 с A_2 (рис. 7.4), а затем поворачиваем ее вокруг A_2 на угол φ до совмещения B'_1 с B_2 . При этом фигура из положения I перейдет в положение II. Поступательная часть плоскопараллельного движения описывается уравнениями

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \end{cases}$$

а вращательная часть – уравнением

$$\varphi = \varphi(t).$$

За полюс можно принять любую точку фигуры. Если за полюс принять точку B , то уравнения, описывающие поступательную часть движения, станут иными:

$$\begin{cases} x_B = x_B(t), \\ y_B = y_B(t), \end{cases}$$

а уравнение вращательного движения останется прежним: $\varphi = \varphi(t)$, поскольку ни величина угла φ , ни направление поворота не изменятся (рис. 7.4). Следовательно, *угол поворота не зависит от выбора полюса*.

Таким образом, плоскопараллельное движение твердого тела можно представить как совокупность двух движений: *поступательного с выбранным полюсом и вращательного вокруг этого полюса*.

Это наиболее общий случай разложения плоскопараллельного движения на более простые – поступательное и вращательное. Однако такое представление плоского движения не является единственно возможным. С помощью следующей теоремы (она приводится без доказательства) можно показать, что в некоторых случаях плоское движение в каждый момент времени можно представить как одно вращение вокруг некоторого центра.

Теорема о центре конечного вращения: любое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить одним поворотом вокруг некоторого центра, называемого **центром конечного поворота**.

Если рассматривать два бесконечно близких положения фигуры, т.е. устремить $\Delta t \rightarrow 0$, то центр конечного поворота превращается в **мгновенный центр вращения**, и плоскопараллельное движение тела можно представить в данный момент времени как одно мгновенное вращение вокруг этого центра. Отметим, что это движение не должно быть поступательным.

7.3. Определение скоростей точек плоской фигуры

Рассмотрим способы определения скоростей точек твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение.

7.3.1. Определение скорости по уравнениям движения точки

Дифференцируя по времени уравнения движения произвольной точки M плоской фигуры, получаем:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x}_M = \dot{x}_A - x' \dot{\varphi} \sin \varphi - y' \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_y = \dot{y}_M = \dot{y}_A - y' \dot{\varphi} \sin \varphi + x' \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases}$$

Этот способ удобен тем, что дает аналитические выражения для скорости точки как функции времени.

7.3.2. Определение скорости по векторной формуле

Из рис. 7.5 имеем:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}. \quad (7.2)$$

Дифференцируя по времени выражение (7.2), получим:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

или

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}. \quad (7.3)$$

Плоскопараллельное движение можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений, поэтому интерпретируем формулу (7.3) следующим образом:

\vec{v}_A – скорость, которую приобретает точка B при поступательном движении фигуры вместе с полюсом A , т.е. скорость полюса;

$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{AB}}{dt}$ – скорость, которую получает точка B при вращении фигуры вокруг полюса A , следовательно, по формуле Эйлера:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{AB}. \quad (7.4)$$

Скорость \vec{v}_{BA} называют **вращательной составляющей скорости точки B** относительно полюса A . Вращательная составляющая \vec{v}_{BA} скорости точки B направлена перпендикулярно отрезку AB (рис. 7.6) и по величине равна $v_{BA} = \omega \cdot AB$.

Окончательно **векторная формула** для определения скоростей точек плоской фигуры имеет следующий вид (за полюс выбрана точка A):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

(7.5)

где 1) $v_{BA} = \omega \cdot AB$;

2) $\vec{v}_{BA} \perp AB$;

3) вектор \vec{v}_{BA} приложен в точке B и направлен в сторону угловой скорости ω , если смотреть из полюса A .

7.3.3. Определение скорости с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС)

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называют точку C_v плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Мгновенный центр скоростей совпадает с мгновенным центром вращения.

Покажем способы нахождения МЦС и определения скоростей точек с помощью МЦС.

Способ 1. Если дана скорость \vec{v}_A точки A плоской фигуры и линия действия вектора скорости точки B этой же фигуры (рис. 7.7), то МЦС лежит в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к направлениям скоростей в точках A и B .

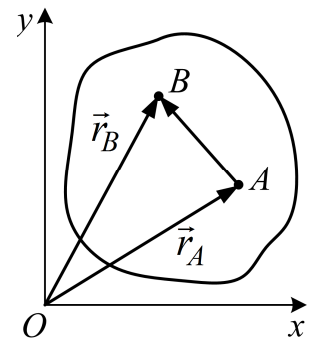


Рис. 7.5

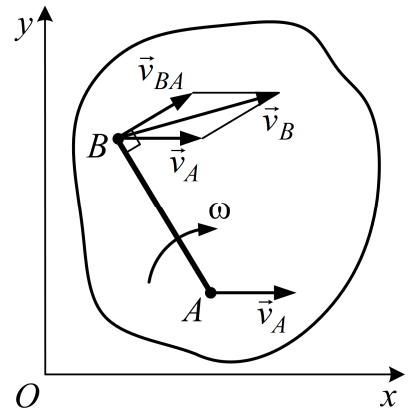


Рис. 7.6

Зная положение МЦС (точка C_v), легко определить угловую скорость вращения фигуры, а с ее помощью величину и направление скорости точки B :

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v}, \quad v_B = \omega \cdot BC_v.$$

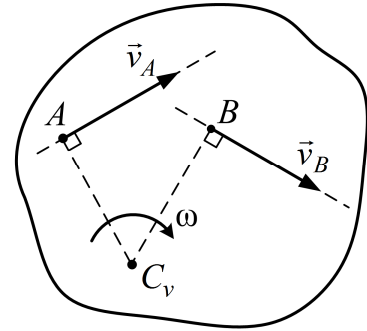


Рис. 7.7

Направление вектора \vec{v}_B должно быть согласовано с направлением угловой скорости ω .

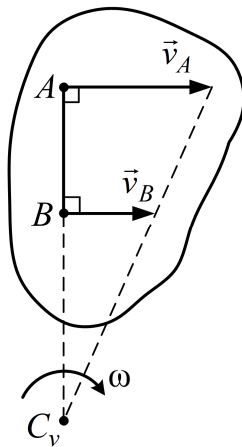
Скорости точек плоской фигуры прямо пропорциональны расстояниям до МЦС: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{AC_v}{BC_v}$.

Способ 2. Если известны скорости двух точек плоской фигуры и они параллельны друг другу (рис. 7.8), причем векторы \vec{v}_A и \vec{v}_B перпендикулярны отрезку AB , то МЦС находится в точке пересечения линии AB с линией, соединяющей концы векторов \vec{v}_A и \vec{v}_B .

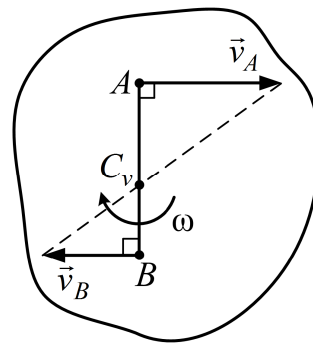
Угловая скорость плоской фигуры определяется следующим образом:

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{v_A - v_B}{AB}, \quad (\text{рис. 7.8, а})$$

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{v_A + v_B}{AB}. \quad (\text{рис. 7.8, б})$$



а)



б)

Рис. 7.8

Способ 3. Если скорости двух произвольных точек плоской фигуры в некоторый момент времени равны по величине и направлению (рис. 7.9), то МЦС не существует, и фигура совершает *мгновенно поступательное движение* ($\omega = 0$).

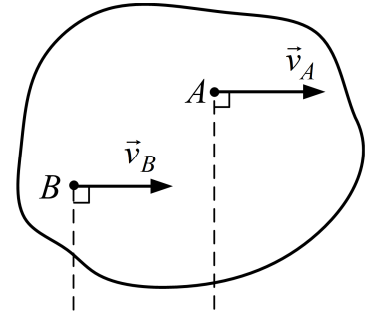


Рис. 7.9

Способ 4. Если известна скорость какой-либо точки A плоской фигуры и угловая скорость ω этой фигуры, то чтобы определить положение МЦС, нужно повернуть скорость точки A на 90° в сторону ω и отложить отрезок $AC_v = \frac{v_A}{\omega}$.

Способ 5. В некоторых случаях положение МЦС известно из условия задачи. Например, мгновенный центр скоростей колеса, катящегося без скольжения по неподвижному рельсу, находится в точке касания колеса с рельсом (рис. 7.10, а), поскольку при движении без скольжения скорости точек касания этих тел равны друг другу. Скорость любой точки неподвижного рельса равна нулю, поэтому и скорость точки колеса, которая касается в данное мгновение рельса, тоже равна нулю.

Аналогично, мгновенный центр скоростей диска, который падает вниз, раскручивая нить (рис. 7.10, б), находится в точке касания диска с нитью.

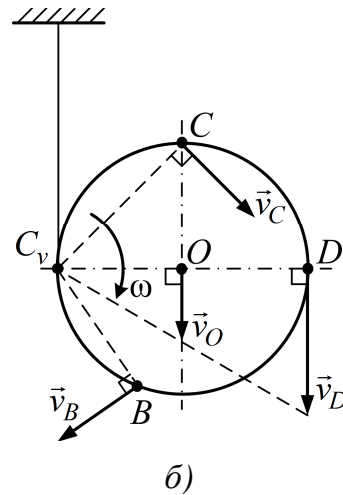
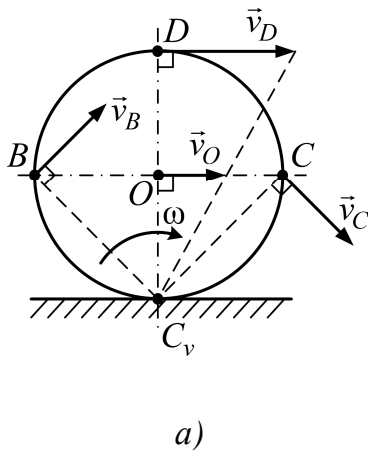


Рис. 7.10

7.3.4. Определение скорости с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек

Теорема о проекциях скоростей:
 проекции скоростей двух точек плоской фигуры на линию, соединяющую эти точки, равны между собой.

Действительно, при проекции уравнения (7.5) на направление AB получаем (рис. 7.11):

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

Здесь учтено, что вектор \vec{v}_{BA} перпендикулярен AB .

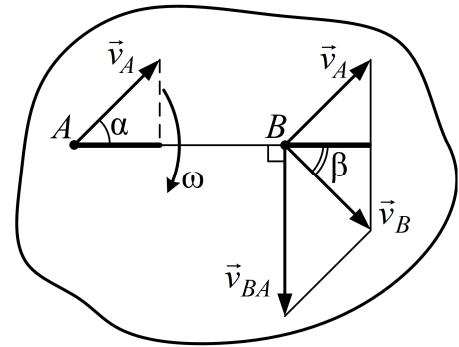


Рис. 7.11

7.4. Определение ускорений точек плоской фигуры

Ускорение точки плоской фигуры найдем, дифференцируя по времени левую и правую части векторной формулы (7.5):

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{v}_{BA}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB}) = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overline{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d(\overline{AB})}{dt}.$$

Учитывая

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$$

с учетом формулы (7.4), получаем:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \overline{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \quad (7.6)$$

Векторное произведение $\vec{\epsilon} \times \overline{AB}$ называют **вращательным ускорением точки B** при вращении фигуры вокруг полюса A и обозначают $\vec{a}_{BA}^{вп}$. Вектор вращательного ускорения перпендикулярен отрезку AB и направлен в соответствии с направлением углового ускорения ϵ плоской фигуры (рис. 7.12). Величина вращательного ускорения

$$a_{BA}^{вп} = \epsilon \cdot AB.$$

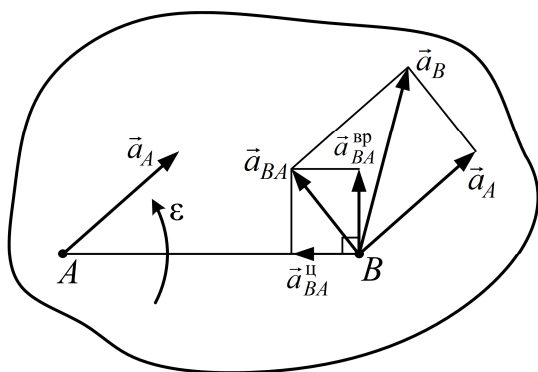


Рис. 7.12

Векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}$ называют **центростремительным ускорением точки B** при вращении плоской фигуры вокруг полюса A и обозначают $\vec{a}_{BA}^п$.

Вектор центростремительного ускорения направлен от точки B к полюсу A (рис. 7.12). Величина центростремительного ускорения

$$a_{BA}^п = \omega \cdot v_{BA} = \omega^2 \cdot AB.$$

Таким образом, с учетом (7.6) ускорение любой точки B плоской фигуры (рис. 7.12) можно представить в виде геометрической суммы двух ускорений:

- 1) полюсного ускорения \vec{a}_A , которое приобретает точка B при поступательном движении фигуры вместе с полюсом A;
- 2) ускорения \vec{a}_{BA} , которое получает точка B при вращении фигуры вокруг полюса A:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

где $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{vp} + \vec{a}_{BA}^п$.

Окончательно **векторная формула для определения ускорений точек плоской фигуры** имеет вид (за полюс выбрана точка A):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{vp} + \vec{a}_{BA}^п, \quad (7.7)$$

где 1) $a_{BA}^{vp} = \epsilon \cdot AB$, $a_{BA}^п = \omega^2 \cdot AB$;

2) вектор $\vec{a}_{BA}^{vp} \perp AB$ и направлен в соответствии с направлением углового ускорения ϵ плоской фигуры, если смотреть из полюса;

3) вектор $\vec{a}_{BA}^п$ направлен к полюсу.

Для нахождения величины ускорения точки B необходимо определить проекции выражения (7.7) на оси x и y выбранной системы координат и вычислить a_{Bx} и a_{By} , тогда

$$a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2}.$$

Лекция 8. Сферическое движение твердого тела.

Общий случай движения твердого тела

Сферическое движение твердого тела. Теорема об оси конечного поворота. Мгновенная ось вращения. Скорости и ускорения точек твердого тела, совершающего сферическое движение. Общий случай движения твердого тела.

8.1. Сферическое движение твердого тела

Если во все время движения тела одна его точка остается неподвижной, то такое движение тела называют **сферическим** (рис. 8.1). Точки тела описывают траектории, лежащие на сферах, центры которых совпадают с неподвижной точкой. Частным случаем сферического движения является вращательное движение.

В технических устройствах сферическое движение твердого тела используется гораздо реже, чем вращательное или плоскопараллельное. Такое движение совершают гироскопы – приборы, широко применяемые в системах управления самолетами, ракетами и морскими судами.

Для определения положения твердого тела в неподвижной системе хуз проведем через неподвижную точку O ось OK (рис. 8.1), жестко связанную с движущимся телом. Положение этой оси можно определить углами α , β , γ , которые ось OK составляет с осями координат. Так как $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то для задания оси OK достаточно двух углов, например, α и β . При этом положение тела в неподвижном пространстве в каждый момент времени может быть определено с помощью трех углов: α , β и φ , причем угол φ определяет поворот тела вокруг оси OK . Если бы было известно, как изменяются эти углы во время движения тела, то уравнения вида:

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

могли бы служить уравнениями сферического движения твердого тела. Однако во многих задачах трудно найти указанные функции.

Положение твердого тела с одной неподвижной точкой удобно определять тремя другими углами, называемыми *углами Эйлера* (рис. 8.2):

угол ψ *прецессии* – угол между осью x и линией ON узлов (линией пересечения плоскостей xOy и $x'Oy'$);

угол θ *нутаии* – угол между осями z и z' ;

угол φ *собственного вращения* – угол между линией узлов и x' .

Названия этих углов заимствованы из астрономии.

Углы Эйлера удобны тем, что все направляющие косинусы подвижных осей координат можно выразить через тригонометрические функции углов Эйлера.

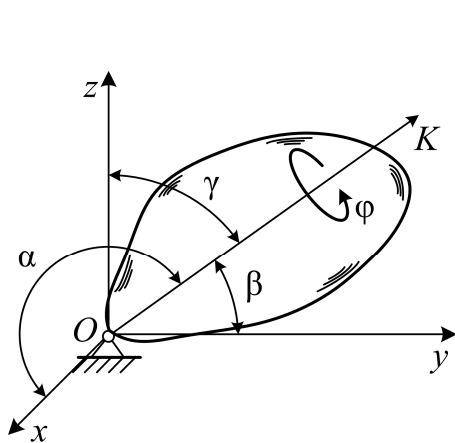


Рис. 8.1

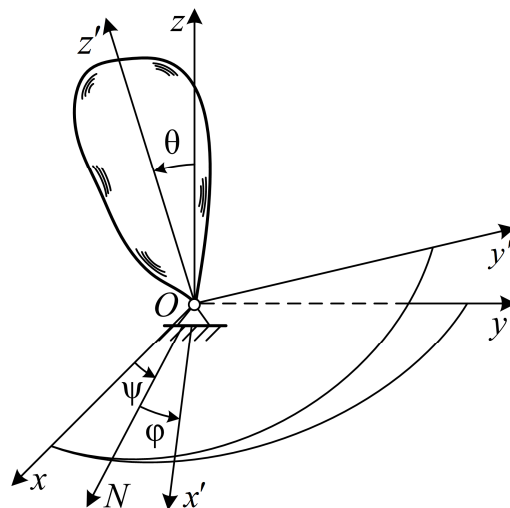


Рис. 8.2

Уравнения сферического движения твердого тела имеют следующий вид:

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

8.2. Теорема об оси конечного поворота. Мгновенная ось вращения

Теорема об оси конечного поворота. Твердое тело с одной неподвижной точкой из данного положения в другое можно переместить одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.

Доказательство. Рассмотрим два положения твердого тела, совершающего сферическое движение. Положение твердого тела в пространстве определяется тремя его точками, не лежащими на одной прямой.

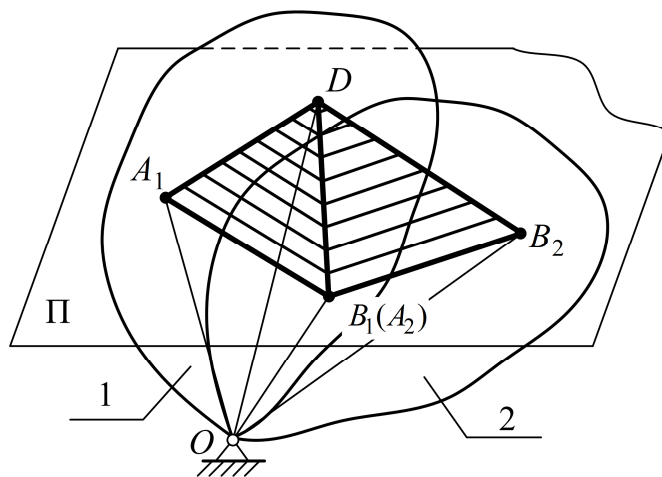


Рис. 8.3

Пусть положение 1 (рис. 8.3) определяется точками O , A_1 , B_1 , причем O – неподвижная точка, точку A_1 выбираем произвольно, а точку B_1 – там, где во втором положении тела окажется точка A_1 .

Положение 2 тела определяется точками O , A_2 , B_2 , причем точка A_2 совпадает с точкой B_1 .

Через точки A_1 , $B_1(A_2)$, B_2 проведем плоскость Π и из точки O опустим на эту плоскость перпендикуляр OD .

Соединим точку D с точками A и B . При этом образуется два треугольника: ΔA_1DB_1 и ΔA_2DB_2 , лежащие в плоскости Π .

Эти треугольники равны между собой по трем равным сторонам, а именно, $A_1B_1 = A_2B_2$ по условию, $A_1D = B_1D = B_2D$ – как проекции равных наклонных ($OA_1 = OB_1 = OB_2$) на плоскость Π . Из равенства треугольников следует, что $\angle A_1DB_1 = \angle A_2DB_2 = \varphi$ (рис. 8.3).

При повороте тела вокруг оси OD на угол φ , $\triangle A_1DB_1$ совмещается с $\triangle A_2DB_2$, и точки A_1, B_1 переходят в положение A_2, B_2 . Но три точки (O, A_2, B_2) определяют положение 2, следовательно, одним поворотом вокруг оси OD твердое тело переместилось из положения 1 в положение 2, что и требовалось доказать.

Ось OD называют *осью конечного поворота*.

Докажем методом от противного, что для положений 1 и 2 ось конечного поворота является единственной. Пусть для положений 1 и 2 имеется еще одна ось конечного поворота – ось OD' . При этом три точки тела – O, D и D' – окажутся неподвижными. Но если три точки тела, не лежащие на одной прямой, неподвижны, то и все тело неподвижно, что является противоречием, поскольку по условию тело движется. Следовательно, второй оси конечного поворота для одной и той же пары положений твердого тела быть не может.

Если рассматриваются два бесконечно близких положения тела, то ось конечного поворота превращается в *мгновенную ось вращения*.

8.3. Скорости и ускорения точек твердого тела, совершающего сферическое движение

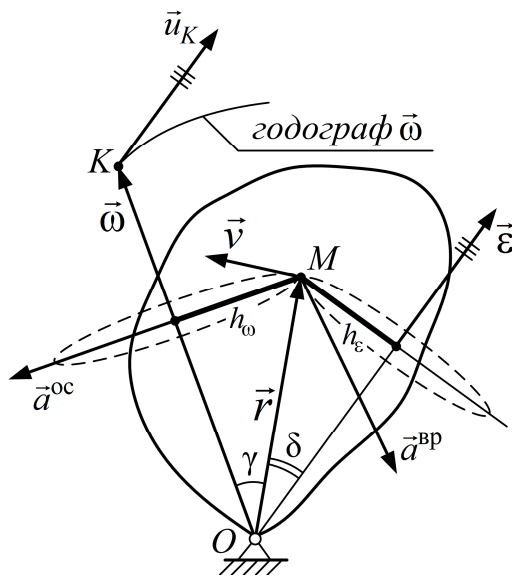


Рис. 8.4

Сферическое движение тела в данный момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 8.4). Величина вектора $\vec{\omega}$ не является производной от некоторого угла по времени, так как при сферическом движении, в отличие от вращения вокруг неподвижной оси, такого угла просто не существует. Тем не менее скорость произвольной точки M этого тела можно определить по формуле Эйлера:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (8.1)$$

Вектор \vec{v} направлен по перпендикуляру к плоскости, проведенной через мгновенную ось и рассматриваемую

точку, в сторону вращения тела (рис. 8.4).

Величина скорости равна

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \gamma = \omega \cdot h_{\omega},$$

где h_{ω} – кратчайшее расстояние от точки M до мгновенной оси вращения.

Для нахождения ускорения произвольной точки M продифференцируем по времени выражение (8.1):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Производная по времени от угловой скорости представляет собой угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

По величине и направлению вектор $\vec{\varepsilon}$ совпадает со скоростью \vec{u}_k конца вектора $\vec{\omega}$ при движении точки K по годографу вектора $\vec{\omega}$ (рис. 8.4).

Заметим, что величина u_k имеет размерность с^{-2} .

Имея в виду, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, получаем выражение для ускорения точки при сферическом движении тела:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Первое слагаемое в формуле называют *вращательным ускорением*:

$$\vec{a}^{\text{вп}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

а второе – *осеостремительным ускорением*:

$$\vec{a}^{\text{ос}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Вектор вращательного ускорения перпендикулярен плоскости (рис. 8.4), образованной векторами $\vec{\varepsilon}$ и \vec{r} и равен

$$a^{\text{вп}} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin \delta = \varepsilon \cdot h_{\varepsilon},$$

где h_{ε} – кратчайшее расстояние от точки M до прямой, по которой направлен вектор углового ускорения.

Вектор осеостремительного ускорения направлен из точки M к мгновенной оси вращения и равен

$$a^{\text{ос}} = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h_{\omega}.$$

Таким образом, ускорение любой точки тела, совершающего сферическое движение, равно

$$\vec{a} = \vec{a}^{\text{oc}} + \vec{a}^{\text{bp}}, \quad (8.2)$$

причем вектор \vec{a}^{oc} направлен к мгновенной оси вращения, а вектор \vec{a}^{bp} – по касательной к окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\epsilon}$ (рис. 8.4).

В общем случае векторы \vec{a}^{oc} и \vec{a}^{bp} расположены друг по отношению к другу не под прямым углом.

8.4. Общий случай движения твердого тела

Рассмотрим общий случай движения свободного твердого тела в пространстве. Такое движение совершает, например, брошенный камень или самолет, выполняющий фигуры высшего пилотажа.

Свяжем с телом подвижную систему $x'y'z'$. Положение твердого тела в неподвижной системе xuz определяется координатами $x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}$ полюсной точки O' (начало координат подвижной системы) и углами Эйлера, образованными подвижными осями с неподвижными. Следовательно, общий случай движения твердого тела в неподвижной системе описывается шестью уравнениями:

$$\begin{aligned} x_{O'} &= f_1(t), \quad y_{O'} = f_2(t), \quad z_{O'} = f_3(t), \\ \varphi &= f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \theta = f_6(t). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Элементарное перемещение твердого тела из данного положения в соседнее можно осуществить с помощью двух движений: поступательного вместе с полюсом и сферического вокруг полюса. Последнее представляет собой элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения.

Поскольку движение тела является совокупностью элементарных перемещений, приходим к следующему утверждению: *движение свободного твердого тела складывается в общем случае из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как полюс со скоростью $\vec{v}_{O'}$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюсную точку* (рис. 8.5).

Поступательная часть движения свободного твердого тела описывается первыми тремя уравнениями (8.3), а вращение вокруг полюса (сферическое движение) – последними тремя из этих уравнений (8.3).

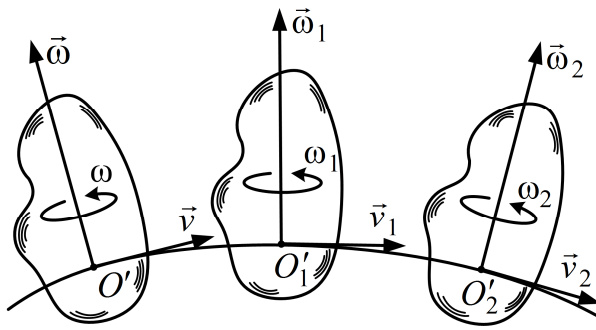


Рис. 8.5

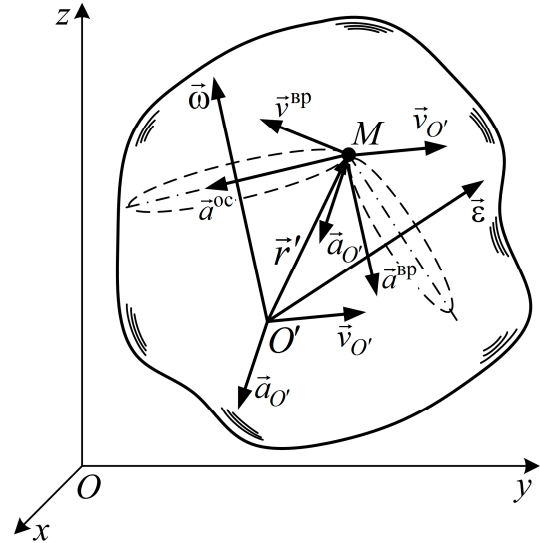


Рис. 8.6

На основании сформулированного утверждения запишем выражение для скорости произвольной точки M свободно движущегося тела (рис. 8.6):

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}^{\text{BP}},$$

где \vec{v}^{BP} — это скорость, полученная точкой M при сферическом движении тела вокруг полюса, следовательно,

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (8.4)$$

причем \vec{r}' — радиус-вектор точки M в подвижной системе отсчета (на рис. 8.6 она не показана).

Ускорение точки M равно геометрической сумме полюсного ускорения $\vec{a}_{O'}$ и того, которое получает точка M при сферическом движении тела вокруг полюса:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}^{\text{oc}} + \vec{a}^{\text{bp}} = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'.$$

$$a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2}.$$

Лекция 9. Сложное движение точки

Относительное, переносное и абсолютное движения точки. Абсолютная и относительная производные вектора по времени. Теорема о сложении скоростей точки. Теорема о сложении ускорений точки (теорема Кориолиса). Вычисление и построение кориолисова ускорения.

9.1. Относительное, переносное и абсолютное движения точки

До сих пор изучалось движение точки по отношению к одной, условно неподвижной, системе отсчета. Наряду с неподвижной системой, может вводиться подвижная система, и движение точки рассматривается в двух системах: *подвижной и неподвижной*.

В разных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, движение одной и той же точки выглядит по-разному. Может оказаться, что в неподвижной системе движение точки будет довольно сложным, а в подвижной – простым. Если к тому же и движение самой подвижной системы относительно неподвижной окажется простым, то в таком случае имеет смысл движение точки относительно неподвижной системы описать с помощью двух простых движений или, как говорят, разложить на два простых движения. Движение точки относительно неподвижной системы в таком случае будем называть сложным (именно потому, что оно раскладывается на два простых). Одно из простых движений – это движение точки по отношению к подвижной системе, а другое – это движение точки вместе с подвижной системой относительно неподвижной.

Сложным движением точки – движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях.

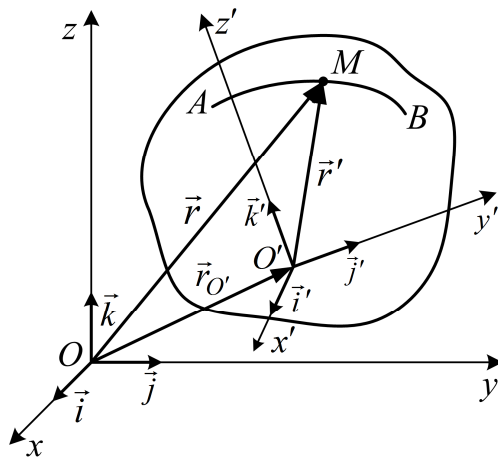


Рис. 9.1

Пусть точка M (рис. 9.1) перемещается в системе $x'y'z'$ по некоторой траектории AB , а сама система $x'y'z'$ движется относительно неподвижной системы xuz .

Движение точки M по траектории AB относительно подвижной системы $x'y'z'$ назовем **относительным движением**. Движение точки M относительно неподвижной системы xuz назовем **абсолютным движением**, а движение относительно неподвижной системы xuz той точки системы $x'y'z'$, с которой в данный момент совпадает точка M , назовем **переносным движением**.

Например, при движении вагона по прямолинейному рельсу (рис. 9.2) точка M обода колеса в неподвижной системе xuz , связанной с землей, совершает движение, траекторией которого является кривая с петлями, называемая *удлиненной циклоидой*. Однако это движение можно разложить на два простых: движение точки M по окружности радиусом CM в подвижной системе $x'y'z'$, связанной с вагоном и прямолинейное движение вдоль оси x вместе с вагоном (по отношению к земле).

Время во всех системах отсчета считается одинаковым, другими словами, *время в ньютоновской механике абсолютно*.

Остановимся подробнее на описании сложного движения точки. Систему xuz (рис. 9.1) будем называть *абсолютной*, а систему $x'y'z'$ – *относительной*. Термины «абсолютный» и «относительный» имеют здесь условный характер. В зависимости от содержания решаемых задач то одну, то другую систему целесообразно принимать за абсолютную.

Движение точки M относительно подвижной системы описывается векторным уравнением:

$$\vec{r}' = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}',$$

где \vec{r}' – радиус-вектор точки M в системе $x'y'z'$;
 $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ – орты координатных осей этой системы.

Векторному уравнению соответствует три скалярных уравнения в проекциях на оси координат системы $x'y'z'$:

$$x' = x'(t), \quad y' = y'(t), \quad z' = z'(t).$$

Более трудным для восприятия является понятие о *переносном движении*. В каждый момент времени движущаяся точка M проходит через некоторый пункт подвижной системы отсчета. Этот пункт в своем движении относительно неподвижной системы имеет определенную траекторию, скорость и ускорение. Если бы движущаяся точка M , проходя через этот пункт, вдруг «приклеилась» бы к движущемуся телу (к системе $x'y'z'$), то она «поехала» бы дальше по траектории, которую описывает пункт в неподвижном пространстве, т.е. ее движение изменилось бы. Это изменившееся движение точки и названо переносным.

Если в относительном движении точка M имеет единственную траекторию, то в переносном – целое семейство траекторий. Связано это с тем, что разные пункты подвижной системы, через которые проходит движущаяся точка M , имеют разные траектории в неподвижном пространстве. Поэтому нельзя говорить о траектории переносного движения вообще, а можно лишь говорить о траектории переносного движения в данный момент времени или о мгновенной переносной траектории.

Наряду с понятием переносного движения точки введем еще понятие о *переносном движении тела* как о движении подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

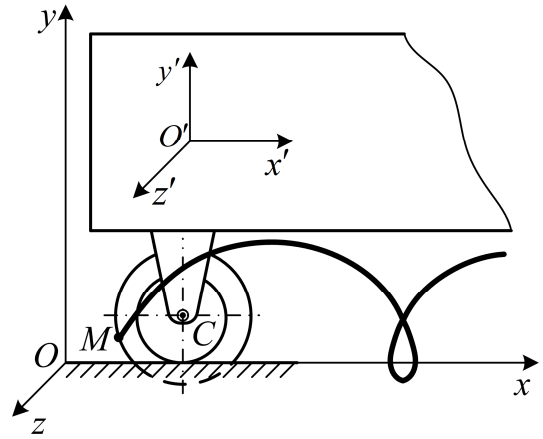


Рис. 9.2

В абсолютном движении точка M имеет единственную траекторию. Траектория абсолютного движения точки M называется *абсолютной траекторией*. Ее уравнение в векторной записи имеет вид (рис. 9.1):

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}', \quad (9.1)$$

где $\vec{r}_{O'}$ – радиус-вектор точки O' (начала подвижной системы отсчета) в системе хуз.

Векторы, входящие в (9.1), принадлежат разным системам отсчета: \vec{r} и $\vec{r}_{O'}$ – абсолютной, а \vec{r}' – относительной системе. Чтобы определить координаты точки M в абсолютной системе воспользуемся матричной записью:

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + B\vec{r}', \quad (9.2)$$

где \vec{r} , $\vec{r}_{O'}$, \vec{r}' – столбцовые матрицы;

B – квадратная матрица, элементами которой являются направляющие косинусы ортов $\vec{i}'(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $\vec{j}'(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$ и $\vec{k}'(\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3)$ в системе хуз.

Иначе можно записать так:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_{O'} + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y_{O'} + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z_{O'} + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что координаты произвольной точки M в абсолютной системе равны:

$$\begin{aligned} x &= x_{O'} + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= y_{O'} + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= z_{O'} + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Все величины, входящие в уравнения (9.3), являются функциями времени.

9.2. Абсолютная и относительная производные вектора по времени

Между кинематическими характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений имеется количественная взаимосвязь. Для установления этой взаимосвязи потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. Об абсолютной производной по времени от вектора постоянного модуля, записанного в подвижной системе отсчета. Пусть система $x'y'z'$ совершает произвольное движение относительно неподвижной системы xuz . В качестве вектора постоянной длины, записанного в подвижной системе $x'y'z'$, возьмем орт \vec{k}' .

Производная по времени от вектора \vec{k}' – это скорость его конца, т.е. скорость точки K (рис. 9.3). Скорость точки K подвижной системы, находящейся в общем случае движения относительно неподвижной системы равна

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{k}', \quad (9.4)$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость подвижной системы.

Из рис. 9.3 следует, что $\vec{r}_K = \vec{r}_{O'} + \vec{k}'$.

Дифференцируя это выражение по времени, получаем:

$$\frac{d\vec{r}_K}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

или

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{O'} + \frac{d\vec{k}'}{dt}. \quad (9.5)$$

Левые части (9.4) и (9.5) равны, поэтому

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}'. \quad (9.6)$$

Аналогичным образом получаем:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}'. \quad (9.7)$$

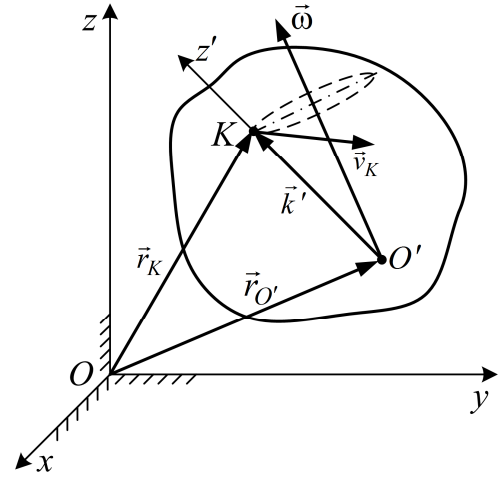


Рис. 9.3

Скорость поступательной части движения подвижной системы не вошла в полученные формулы. Это связано с тем, что при поступательном движении подвижной системы относительно неподвижной орты $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ не получают приращения.

Лемма 2. Об абсолютной производной по времени от вектора переменного модуля, записанного в подвижной системе отсчета. В качестве вектора переменной длины, записанного в проекциях на оси подвижной системы, возьмем вектор

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \quad (9.8)$$

и продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (9.9)$$

Преобразуем равенство (9.9), используя (9.6) – (9.8):

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (9.10)$$

где $\frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$.

Производную $\frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt}$ называют *локальной* или *относительной производной*, поскольку при ее вычислении не учитывается движение системы $x'y'z'$ относительно неподвижной системы xuz , т.е. учитывается изменение вектора только относительно подвижной системы отсчета. Производную $\frac{d\vec{r}'}{dt}$ называют *абсолютной производной*, поскольку при ее вычислении учитывается полное изменение вектора $\vec{r}'(t)$, состоящее из двух частей: изменения со временем этого вектора в системе $x'y'z'$; изменения этого вектора, обусловленного движением системы $x'y'z'$ относительно системы xuz .

9.3. Теорема о сложении скоростей точки

Рассмотрим движение точки M в двух системах отсчета: неподвижной xuz с началом в точке O и подвижной $x'y'z'$ с началом в точке O' . Положение точки M в неподвижной системе xuz задается радиусом-вектором (рис. 9.1)

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

а в подвижной $x'y'z'$ – радиусом-вектором

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}'.$$

Скорость точки относительно подвижной системы $x'y'z'$ называют **относительной скоростью точки** и обозначают \vec{v}_r .

Относительная скорость точки M равна локальной производной от радиуса-вектора $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (9.11)$$

Переносная скорость точки M – это скорость того пункта подвижной системы (относительно неподвижной), с которым в данный момент совпадает движущаяся точка M . Переносная скорость точки обозначается \vec{v}_e .

Подвижная система $x'y'z'$ находится в общем случае движения относительно неподвижной системы xuz , поэтому скорость пункта подвижной системы определяется формулой $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, и следовательно, переносная скорость точки M равна

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (9.12)$$

Абсолютная скорость точки — это скорость точки относительно неподвижной системы xuz . Она обозначается \vec{v}_a (индекс a – от начала французского слова *absolue*, что в переводе означает «абсолютный») и равна абсолютной производной по времени от радиуса-вектора:

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (9.13)$$

Из рис. 9.1 видно, что $\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$. Подставляя это выражение в (9.13) и произведя дифференцирование, получаем абсолютную скорость точки:

$$\vec{v}_a = \frac{d(\vec{r}_{O'} + \vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (9.14)$$

Последнее слагаемое в этой формуле представляет собой абсолютную производную от вектора \vec{r}' , записанного в подвижной системе отсчета. На основании (9.10) она равна относительной производной от этого вектора, сложенной с векторным произведением угловой скорости подвижной системы на дифференцируемый вектор. Это с учетом (9.11) дает

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Подставляя это выражение в (9.14) и учитывая при этом, что $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \vec{v}_{O'}$, получаем

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (9.15)$$

Поскольку сумма двух последних слагаемых в соответствии с формулой (9.12) есть не что иное, как переносная скорость, окончательно получаем

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \quad (9.16)$$

Полученная запись выражает **теорему о сложении скоростей точки**: *абсолютная скорость точки, совершающей сложное движение, равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.*

Таким образом, с помощью этой теоремы по известным относительной скорости точки и переносной скорости можно вычислить абсолютную скорость точки.

Если известны абсолютная и переносная скорости, то нетрудно из (9.16) получить относительную скорость точки:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e.$$

9.4. Теорема о сложении ускорений точки (теорема Кориолиса)

Относительное ускорение точки — это то ускорение, которое имеет точка при движении относительно подвижной системы $x'y'z'$. Оно обозначается \vec{a}_r и равно относительной производной от вектора относительной скорости:

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}. \quad (9.17)$$

При вычислении относительного ускорения движение подвижной системы не учитывается.

Переносное ускорение точки — это ускорение того пункта подвижной системы (относительно неподвижной), с которым в данный момент совпадает движущаяся точка. Оно обозначается \vec{a}_e .

Подвижная система находится в общем случае движения относительно неподвижной системы, поэтому переносное ускорение точки M равно

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Абсолютное ускорение точки — это ускорение точки при движении относительно неподвижной системы. Оно обозначается \vec{a}_a и равно

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}. \quad (9.18)$$

Для определения абсолютного ускорения подставим в (9.18) выражение (9.15) и вычислим абсолютную производную:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d(\vec{v}_r + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (9.19)$$

Векторы $\vec{v}_{O'}$ и $\vec{\omega}$, характеризующие движение подвижной системы, записаны в абсолютной системе, поскольку движение подвижной системы может видеть только наблюдатель, находящийся в неподвижной системе. Абсолютные производные от этих векторов, входящие в (9.19), равны

$$\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{a}_{O'}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}. \quad (9.20)$$

Векторы \vec{r}' и \vec{v}_r , определяющие положение и скорость точки M в подвижной системе, естественно, записаны наблюдателем, находящимся в этой подвижной системе. Следовательно, на основании (9.10), их абсолютные производные, входящие в (9.19), равны

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'; \quad \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{v}}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r'. \quad (9.21)$$

С учетом формул (9.11) и (9.17), а именно

$$\frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt} = \vec{v}_r, \quad \frac{d\tilde{\vec{v}}_r}{dt} = \vec{a}_r,$$

выражения (9.21) преобразуются к виду

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r'.$$

Подставляя полученные выражения в (9.19) и учитывая при этом (9.20), получаем

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{O'} + \vec{\epsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (9.22)$$

Сумма $\vec{a}_{O'} + \vec{\epsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$, входящая в (9.22), представляет собой переносное ускорение.

Слагаемое $2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ называют **кориолисовым ускорением** и обозначают \vec{a}_c (индекс c – начальная буква фамилии французского механика *Coriolis*, получившего формулу (9.22)).

Таким образом, абсолютное ускорение точки равно

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Полученная формула выражает *теорему сложения ускорений* или **теорему Кориолиса**: абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

9.5. Вычисление и построение кориолисова ускорения

Вектор кориолисова ускорения вычисляется по формуле

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \quad (9.23)$$

а его численное значение

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \quad (9.24)$$

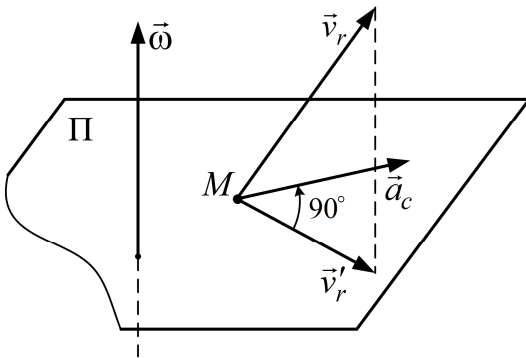


Рис. 9.4

Чтобы построить вектор \vec{a}_c , можно воспользоваться **правилом Жуковского**:

1) через точку M , ускорение которой определяется, провести плоскость Π , перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}$ угловой скорости переносного движения (рис. 9.4);

2) на плоскость Π спроектировать вектор \vec{v}_r относительной скорости точки M ;

3) полученную проекцию \vec{v}'_r повернуть в плоскости Π на 90° в сторону, согласованную с направлением угловой

скорости $\vec{\omega}_e$.

Построенный по этому правилу вектор совпадает по направлению с вектором кориолисова ускорения.

В частных случаях кориолисово ускорение может оказаться равным нулю.

Из (9.24) следует, что $a_c = 0$ в трех случаях, если

1) $\omega_e = 0$, т.е. переносное движение – поступательное или мгновенно поступательное;

2) $v_r = 0$ (в некоторые моменты времени скорость относительного движения точки может оказаться равной нулю, например, в моменты перемены направления движения при колебательном движении);

3) $\vec{\omega}_e \parallel \vec{v}_r$, при этом $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$.

Влияние кориолисова ускорения, возникающего в результате вращения Земли вокруг ее оси, отражается на разнообразных явлениях, которые наблюдаются на земной поверхности.

Рассмотрим точку M , движущуюся вдоль меридиана с севера на юг со скоростью \vec{v}_r (рис. 9.5). Принимая во внимание направление угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения Земли, определяем на основании формулы (9.23) направление вектора \vec{a}_c – кориолисова ускорения. В северном полушарии этот вектор направлен на восток (по касательной к параллели), а в южном – на запад. На экваторе кориолисово ускорение равно нулю.

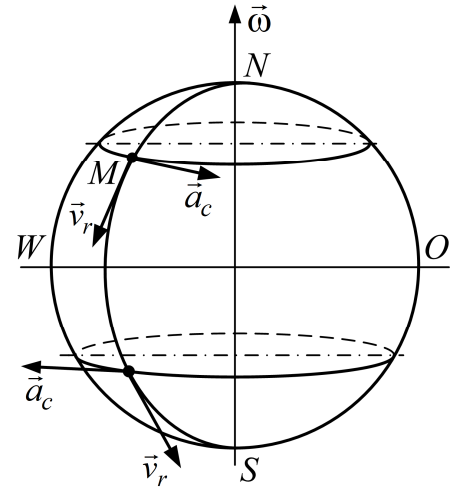


Рис. 9.5

3. ДИНАМИКА

Лекция 10. Аксиомы динамики. Динамика материальной точки

Законы Галилея – Ньютона (аксиомы динамики). Движение точки в инерциальной системе отсчета. Прямая и обратная задачи динамики точки. Дифференциальные уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета. Относительное равновесие материальной точки. Относительный покой тела на поверхности Земли. Принцип относительности классической механики.

10.1. Законы Галилея – Ньютона (аксиомы динамики)

Динамика основана на ряде положений, которые являются аксиомами и называются законами динамики. Эти законы установлены путем обобщения опытов и наблюдений за движением тел и проверенные практикой. Эти законы впервые сформулированы И. Ньютоном в сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687) [8]. Они носят аксиоматический характер и не требуют математических доказательств. Сформулированы эти законы для простейшего материального объекта – материальной точки.

Аксиома 1. Закон инерции

Материальная точка, на которую не действуют силы, находится в покое или движется равномерно и прямолинейно¹:

$$\vec{v} = \text{const} \text{ или } \vec{v} = 0.$$

К такому выводу впервые пришел Г. Галилей в 1638 г.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил или под воздействием уравновешенной системы сил, называется *движением по инерции*. [9, с. 6]

Аксиома 2. Основное уравнение динамики

Сила F , действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение a , которое пропорционально силе и направлено в сторону ее действия²:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (10.1)$$

где m – масса материальной точки, являющаяся мерой ее инертности.

Данную аксиому называют *основным уравнением* или *основным законом динамики*. Второй закон был установлен И. Ньютоном.

¹ В труде Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии» (пер. А.Н. Крылова) приводится следующая формулировка первого закона: «*Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние*». [8, с. 39]

² В труде Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии» (пер. А.Н. Крылова) приводится следующая формулировка второго закона: «*Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует*». [8, с. 40]

Система отсчета, в которой выполняются первая и вторая аксиомы динамики, называется *инерциальной системой отсчета*. Инерциальность системы отсчета может быть проверена только опытным путем. [7, с. 73]

Для большинства технических задач систему отсчета, связанную с Землей, можно приближенно считать инерциальной.

Аксиома 3. Закон равенства действия и противодействия

Силы взаимодействия двух материальных точек всегда действуют по одной прямой, противоположно направлены и численно равны между собой³:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad F_1 = F_2.$$

Применив вторую аксиому динамики (10.1), получим $m_1 a_1 = F_1$ и $m_2 a_2 = F_2$. Учитывая равенство $F_1 = F_2$, имеем $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$, т.е. ускорения точек обратно пропорциональны массам.

Аксиома 4. Принцип независимости действия сил

Материальная точка при действии на нее системы сил приобретает ускорение, равное сумме ускорений, возникающих от действия каждой силы в отдельности:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда получаем основное уравнение динамики точки при действии на нее нескольких сил:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$ – равнодействующая сил, действующих на точку.

Примечание. Законы Ньютона сформулированы для свободных материальных точек. Однако, приняв принцип освобожденности от связей, можно распространить применение основного уравнения динамики точки и на несвободные точки.

Принцип освобожденности заключается в следующем: не нарушая покоя или движения точек, можно отбросить наложенные на них связи и заменить их действие введением соответствующих сил реакций.

После применения принципа освобожденности от связей основное уравнение динамики точки примет следующий вид:

³ В труде Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии» (пер. А.Н. Крылова) приводится следующая формулировка третьего закона: «*Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны*». [8, с. 41]

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

где \vec{F} – равнодействующая активных сил;
 \vec{R} – равнодействующая сил реакций связей. [2, с. 212]

10.2. Динамика материальной точки

10.2.1. Движение точки в инерциальной системе отсчета

Основное уравнение динамики для материальной точки массой m устанавливает зависимость между силой \vec{F} , действующей на точку, и ускорением \vec{a} , получаемым этой точкой: $m\vec{a} = \vec{F}$.

Поскольку $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, то основное уравнение динамики для точки является дифференциальным уравнением второго порядка. Уравнение (10.1) называют *дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме*.

Из закона независимости действия сил $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$ – равнодействующая всех сил, действующих на точку.

В общем случае силы, действующие на точку, являются переменными. В проекциях на декартовы оси координат уравнение (10.1) получают дифференциальные уравнения движения материальной точки в скалярной форме [7, с. 74]:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases} \quad (10.2)$$

Уравнения (10.2) содержат производные координат и образуют систему дифференциальных уравнений движения материальных точек.

Если точка движется в плоскости, то система (10.2) принимает вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \end{cases}$$

При движении точки по прямой система (10.2) сводится к единственному уравнению:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}). \quad (10.3)$$

Общее решение системы уравнений (10.2) содержит шесть произвольных постоянных:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases}$$

Произвольные постоянные находятся из начальных условий:

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= x_0, & \dot{x}|_{t=0} &= \dot{x}_0, \\ y|_{t=0} &= y_0, & \dot{y}|_{t=0} &= \dot{y}_0, \\ z|_{t=0} &= z_0, & \dot{z}|_{t=0} &= \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Если точка движется по известной траектории, то основное уравнение динамики удобно записать в проекциях на оси естественной системы координат (касательную, нормаль и бинормаль):

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n, \quad ma_b = F_b,$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s}), \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}), \\ 0 = F_b(t, s, \dot{s}), \end{cases} \quad (10.4)$$

где ρ – радиус кривизны траектории в точке;

a_τ, a_n, a_b – соответственно проекции вектора ускорения на касательную, нормаль и бинормаль.

Скалярные уравнения (10.4) называют *естественными уравнениями движения материальной точки*.

Дифференциальное уравнение в проекции на бинормаль не содержит производных и совпадает с уравнением статики. Это позволяет в некоторых задачах легко определять силы реакций связей. [3, с. 4]

10.2.2. Прямая и обратная задачи динамики точки

Различают две основные задачи динамики.

1. Прямая (первая) задача динамики. Заданы масса точки и кинематические уравнения движения точки. Требуется определить силу, вызывающую заданное движение. [3, с. 4]

2. Обратная (вторая) динамики. Дана масса точки и сила, действующая на точку. Требуется определить движение точки.

Обе задачи решаются с помощью основного уравнения динамики и проекции его на координатные оси. Решение первой задачи связано с операциями дифференцирования. Решение обратной задачи требует интегрирования

соответствующих дифференциальных уравнений. Таким образом, обратная задача сложнее прямой задачи.

Решение прямой задачи динамики

1. Рассмотрим решение прямой задачи динамики в прямоугольной декартовой системе координат, когда движение точки задано *координатным способом*. [2, с. 215]

Дано: m – масса точки; $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – закон движения точки.

Определить: \vec{F} .

Решение:

1) определяем проекции равнодействующей на оси координат, вычисляя производные от заданных функций – уравнений движения (10.2):

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z};$$

2) вычисляем модуль равнодействующей через проекции:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

3) определяем направление равнодействующей:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

2. Рассмотрим решение прямой задачи динамики с использованием *естественных уравнений движений*. [2, с. 216]

Дано: m – масса точки, траектория точки $s(t)$, ρ – радиус кривизны траектории.

Определить: \vec{F} .

Решение:

1) проекции равнодействующей на естественные оси:

$$F_\tau = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad F_n = m \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2;$$

2) модуль равнодействующей

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2};$$

3) направление равнодействующей в соприкасающейся плоскости:

$$\cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = \frac{F_{\tau}}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{n}) = \frac{F_n}{F}.$$

Ускорение точки также может быть определено, если задано время t движения, путь s , пройденный точкой, или конечная скорость при равнопеременном движении.

Решение обратной задачи динамики

Для решения обратной задачи динамики точки нужно знать не только силы, но еще и начальные условия. [2, с. 219]

Задача интегрирования системы дифференциальных уравнений является в общем случае очень трудной. Во многих задачах интегрирование производят приближенно или выполняют с использованием программных продуктов.

Приведем рекомендуемый план решения обратной задачи динамики точки. [3, с. 17; 9, с. 11]

1. Выбрать удобную *систему отсчета*, если она не указана в условии задачи, указать начало и положительное направление отсчета всех координат. Выбирают прямоугольную (неподвижную) систему координат при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) систему координат при известной траектории. Начало отсчета совместить с начальным положением точки (при $t = 0$) или равновесным положением точки (например, при колебаниях точки).

2. Изобразить *материальную точку* в положении, соответствующем произвольному моменту времени (при $t > 0$).

3. Материальную точку *освободить от связей*, заменив их действие реакциями связей, *приложить активные силы*. При учете сил сопротивления принять, что точка в данный момент времени движется в сторону увеличения координат.

4. Записать *основной закон динамики* в векторном виде, спроецировать на выбранные оси, выразить задаваемые или реактивные силы через переменные время, координаты или скорости, если они от них зависят.

5. *Решить дифференциальные уравнения*. Понизить производную, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду, например, $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$ или $\ddot{s} = \frac{dv_{\tau}}{dt}$. В зависимости от постановки задачи *произвести необходимые вычисления*. При решении обратной задачи динамики на данном этапе следует обратить внимание на правильную запись *начальных условий*, требуемых для определения постоянных интегрирования.

10.3. Динамика относительного движения точки

10.3.1. Дифференциальные уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета

В п. 10.2 рассматривались дифференциальные уравнения движения материальной точки в инерциальной системе отсчета, т.е. в системе, в которой справедливы законы Ньютона. Получим уравнения движения материальной точки по отношению к системе, движущейся относительно инерциальной системы. [3, с. 30]

Введем в рассмотрение две системы отсчета: инерциальную (*абсолютную систему отсчета*, условно неподвижную) и систему, движущуюся относительно инерциальной. Вторую систему будем называть *относительной системой отсчета*.

В зависимости от того, по отношению к какой системе отсчета рассматривается движение точки, будем различать абсолютное движение точки и относительное движение точки.

Движение точки относительно абсолютной системы отсчета описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a}_a = \vec{F}, \quad (10.5)$$

где \vec{a}_a – абсолютное ускорение точки;

\vec{F} – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Согласно теореме Кориолиса

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (10.6)$$

где \vec{a}_r – ускорение точки относительно подвижной системы отсчета; \vec{a}_e – переносное ускорение точки; \vec{a}_c – кориолисово ускорение.

Подставляя (10.6) в (10.5), получаем:

$$m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c = \vec{F}$$

или

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c. \quad (10.7)$$

Введем обозначения:

$$-m\vec{a}_e = \vec{\Phi}_e, \quad -m\vec{a}_c = \vec{\Phi}_c. \quad (10.8)$$

Вектор $\vec{\Phi}_e$ называют *переносной силой инерции*, а вектор $\vec{\Phi}_c$ – *кориолисовой силой инерции*.

Подставляя (10.8) в (10.7), получаем уравнение относительного движения материальной точки:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (10.9)$$

Уравнение (10.9) отличается от уравнения второго закона Ньютона в форме (10.1), следовательно, относительная система отсчета в общем случае не является инерциальной

В проекциях на оси x_r, y_r, z_r подвижной системы уравнению (10.9) соответствуют три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_r &= F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y}_r &= F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \\ m\ddot{z}_r &= F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

С помощью уравнений (10.10) решаются задачи динамики точки при ее движении относительно неинерциальной системы. Методы решения аналогичны изложенным ранее и отличаются тем, что помимо обычных сил к материальной точке прикладываются еще силы инерции.

Отметим качественное различие между равнодействующей \vec{F} , входящей в уравнение (10.9), и силами инерции. Сила \vec{F} – результат действия на материальную точку физических тел, которые можно конкретно указать во всех частных случаях.

10.3.2. Относительное равновесие материальной точки

Пусть материальная точка находится в равновесии в подвижной (неинерциальной) системе отсчета. Выясним, какому условию должны подчиняться в этом случае силы, действующие на точку.

При равновесии точки в подвижной системе ее относительная скорость $v_r = 0$ и относительное ускорение $a_r = 0$. При этом кориолисова сила инерции

$$\vec{\Phi}_c = -2m\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

оказывается равной нулю, и уравнение (10.9) принимает следующий вид:

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (10.11)$$

Полученное уравнение представляет собой условие равновесия материальной точки в неинерциальной системе отсчета. Уравнение (10.11) называют *условием относительного равновесия материальной точки*.

10.3.3. Относительный покой тела на поверхности Земли

Условие относительного покоя тела (материальной точки) M (рис. 10.1) на поверхности Земли выражается равенством:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e = 0,$$

где \vec{F} – сила притяжения Земли, направленная к центру Земли;

\vec{N} – нормальная реакция;

$\vec{\Phi}_e$ – переносная сила инерции.

Вследствие равномерного вращения Земли

$$\Phi_e = m\omega_e^2 R \cos \varphi,$$

где R – радиус Земли;

φ – географическая широта места;

ω_e – угловая скорость вращения Земли, $\omega_e = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7,3 \times 10^{-5}$ рад/с.

Очевидно, что давление тела на опору выражается силой $\vec{P} = -\vec{N}$, следовательно,

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{\Phi}_e,$$

причем сила \vec{P} представляет собой *вес тела в данной точке Земли*.

Направление силы \vec{N} определяет *направление вертикали в данной точке земной поверхности*.

По модулю сила инерции $\vec{\Phi}_e$ мала по сравнению с весом тела в любой точке земной поверхности и вблизи нее.

Отношение модулей этих сил равно

$$\frac{\Phi_e}{P} = \frac{\omega_e^2 R \cos \varphi}{g}.$$

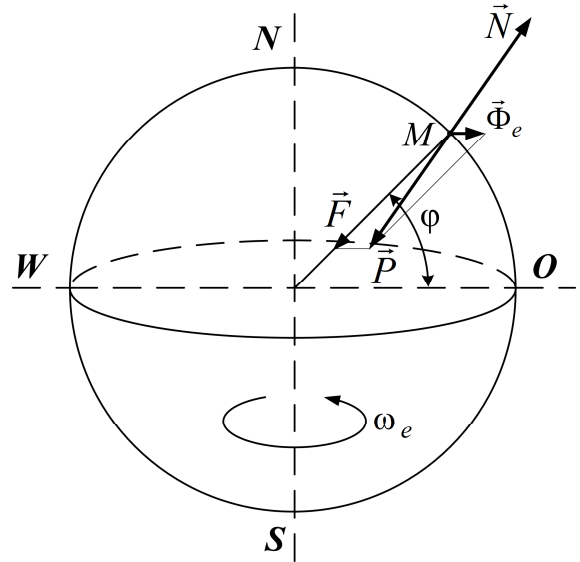


Рис. 10.1

Это отношение имеет максимальное значение на экваторе, где $\varphi = 0$, $R = 6371$ км, $g = 9,78$ м/с²:

$$\frac{\Phi_e}{P} = \frac{\omega_e^2 R \cos \varphi}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 6371 \cdot 10^3}{24^2 \cdot 3600^2 \cdot 9,78} \approx 0,00345.$$

Из этого следует, что вес P тела по модулю мало отличается от величины силы F притяжения к Земле, и направление вертикали составляет с направлением силы F очень малый угол (на рис. 10.1 этот угол утрирован). Наибольшее значение этого угла (на широте $\varphi = 45^\circ$), не превосходит $6'$.

Наибольший вес тело имеет при $\varphi = 90^\circ$, т.е. на полюсе, поскольку переносная сила инерции там равна нулю. Кроме того, на полюсе ускорение свободного падения имеет наибольшее значение, равное $9,83$ м/с².

10.3.4. Принцип относительности классической механики

Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки по отношению к системе отсчета, которая движется *равномерно прямолинейно поступательно* по отношению к инерциальной системе. В этом случае $a_e = 0$ и $\omega_e = 0$, и уравнение (10.9) приобретает вид:

$$m\vec{a}_r = \vec{F}. \quad (10.12)$$

Сопоставляя уравнение (10.12) с уравнением (10.1), видим, что в этом случае нет разницы между относительным ускорением \vec{a}_r материальной точки и ее абсолютным ускорением \vec{a}_a . Иными словами, в данном случае относительное движение точки ничем не отличается от ее абсолютного движения.

В рассматриваемой подвижной системе силы инерции оказываются равными нулю и второй закон Ньютона, а значит и закон инерции (первый закон Ньютона) имеют ту форму, которая составляет основу классической механики. Точно также в такой системе выполняется и третий закон Ньютона. Следовательно, *любая система, движущаяся относительно инерциальной равномерно прямолинейно поступательно, тоже является инерциальной системой.*

В природе нет какой-то одной, выделенной инерциальной системы отсчета, все инерциальные системы равноправны. Во всех инерциальных системах механические явления описываются законами классической механики.

Тождественность дифференциальных уравнений относительного и абсолютного движений материальной точки приводит к тому, что *никаким механическим опытом, проводимом в инерциальной системе отсчета, невозможно установить, движется или покоится эта система относительно другой инерциальной системы. В этом заключается принцип относительности классической механики.*

Лекция 11. Динамика механической системы. Геометрия масс

Понятие механической системы. Центр масс системы. Основное уравнение динамики точек механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Законы сохранения движения центра масс. Осевой момент инерции тела. Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса – Штейнера. Примеры вычисления осевых моментов инерции некоторых однородных тел. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции.

11.1. Понятие механической системы

Механическая система – совокупность материальных точек или тел, определенным образом взаимодействующих между собой. [2, с. 255; 7, с. 84]

Движение каждой точки, входящей в систему, зависит от движения других точек системы. Материальное тело – твердое, упругое, жидкое, газообразное, любая машина, любое сооружение – в динамике рассматривается как механическая система.

Различают механические системы *неизменяемые* и *изменяемые*. В неизменяемой системе расстояния между точками остаются неизменными, примером такой системы является абсолютно твердое тело. В изменяемой системе расстояния между точками изменяются, такими системами являются упругие, жидкие, газообразные тела, механизмы и т.п.

Классическим примером механической системы служит солнечная система, в которой тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером является станок, в котором тела связаны друг с другом посредством различных соединений, передающих усилия. Совокупность тел, между которыми нет сил взаимодействия, механическую систему не образуют. Так, например, группа самолетов, выполняющая фигуру высшего пилотажа, механической системой не является. [3, с. 46]

В динамике часто рассматриваются механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных неупругими (недеформируемыми) связями. Такие механические системы по своим свойствам относятся к классу неизменяемых систем.

11.2. Центр масс системы

Рассмотрим систему n материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n , массы которых равны m_1, m_2, \dots, m_n и положение которых определяется радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ (рис. 11.1).

Масса системы равна сумме масс всех точек или тел, образующих систему:

$$m = \sum_{k=1}^n m_k .$$

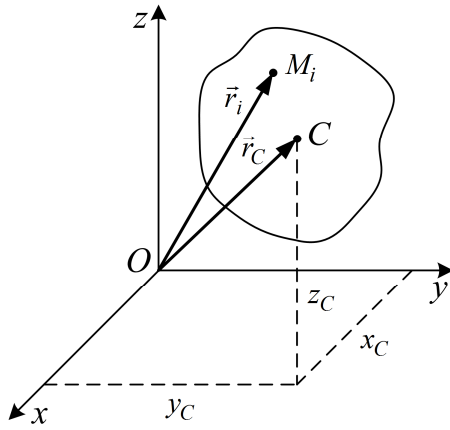


Рис. 11.1

Центром масс или **центром инерции** механической системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{m}, \quad (11.1)$$

где m – масса всей системы.

Координаты центра масс системы выводятся путем проецирования обеих частей равенства (11.1) на оси координат:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{m}. \quad (11.2)$$

Положим, система является твердым телом, находящимся вблизи Земли и имеющим малые размеры по сравнению с ней.

Умножим числитель и знаменатель в формулах (11.1) и (11.2) на ускорение свободного падения g и подставим вместо mg вес тела P , а вместо $m_k g$ вес k -й точки p_k . Тогда эти формулы перейдут в формулы для радиуса-вектора и координат центра тяжести тела. Следовательно, центр тяжести твердого тела совпадает с центром масс этого же тела.

Однако, понятия «центр масс» и «центр тяжести» не являются тождественными. Понятие о центре тяжести как о точке, через которую проходит равнодействующая сил тяжести, имеет смысл только для твердого тела, находящегося в поле сил тяжести. Понятие же о центре масс имеет смысл для любой системы точек или тел независимо от того, находится ли эта система под действием каких-нибудь сил или нет. Если представить себе систему затвердевшей и образующей одно твердое тело, то центр тяжести этого тела совпадает с центром масс системы. [3, с. 46]

Перепишем формулу (11.1) в виде $m\vec{r}_C = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k$, и продифференцируем обе

части ее по времени $m\dot{\vec{r}}_C = \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k$.

Тогда

$$m\vec{v}_C = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k, \quad (11.3)$$

где $\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C$ – скорость центра масс системы;

$\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k$ – скорость k -й точки системы.

Если продифференцировать обе части формулы (11.3) по времени, то получим

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k,$$

где $\vec{a}_C = \dot{\vec{v}}_C = \ddot{\vec{r}}_C$ – ускорение центра масс системы;

$\vec{a}_k = \dot{\vec{v}}_k = \ddot{\vec{r}}_k$ – ускорение k -й точки системы.

11.3. Основное уравнение динамики точек механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Тогда из основного уравнения динамики (10.1) для k -й точки получаем дифференциальные уравнения движения механической системы:

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i \quad (k = 1, \dots, n). \quad (11.4)$$

При анализе обратной задачи динамики для материальной точки было отмечено, что решение системы трех дифференциальных уравнений является очень сложной задачей и возможно лишь при определенных зависимостях силы от t, x, \dot{x} .

Еще более осложняется решение обратной задачи динамики для механической системы. Здесь интегрирование системы $3n$ дифференциальных уравнений движения (11.4) практически не осуществимо (даже при заданных простых законах изменения внутренних сил).

Использование современных программных продуктов расширяет возможности получения численного решения, но при этом очень важным остается анализ физических основ рассматриваемых процессов.

Основная роль дифференциальных уравнений движения точек механической системы состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем динамики, которые, в свою очередь, используются для анализа движения механической системы.

11.4. Теорема о движении центра масс механической системы

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела) достаточно знать закон движения центра масс.

Прежде чем сформулировать теорему о движении центра масс, вспомним, что движение материальной точки описывается с помощью основного уравнения динамики (10.1).

Теорема о движении центра масс механической системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил:

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \quad m = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (11.5)$$

Доказательство. Основное уравнение динамики для k -й материальной точки

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k=1, \dots, n).$$

Просуммируем эти равенства:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i.$$

Используя свойство внутренних сил, получим

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} m \vec{r}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow m \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e.$$

Теорема доказана.

Проецируя обе части равенства (11.5) на координатные оси инерциальной системы, получаем дифференциальные уравнения движения центра масс системы:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad m\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \quad (11.6)$$

Примечания

1. Используя уравнения (11.6), можно сформулировать и решить первую и вторую задачи динамики для центра масс.

2. Поступательное движение тела полностью определяется движением центра масс. Поэтому уравнения (11.6) можно считать дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела. [2, с. 261]

Внутренние силы не входят уравнения (11.5) и (11.6) и не влияют непосредственно на движение центра масс механической системы. Только внешние силы оказывают влияние на движение центра масс. Однако при определенных условиях внутренние силы способны изменить внешние силы, и тогда они, через внешние силы, влияют на движение центра масс.

11.5. Законы сохранения движения центра масс

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, во все время движения равен нулю, то центр масс системы движется равномерно и прямолинейно или же остается в покое. [2, с. 261]

Действительно, если $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$, то $\vec{v}_C = \vec{v}_{C_0}$ (равномерное и прямолинейное движение) или $\vec{r}_C = \vec{r}_{C_0}$ (покой).

2. Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось во все время движения равна нулю, то центр масс вдоль этой оси движется равномерно или не перемещается вдоль нее.

Пусть проекция главного вектора на ось x , например, все время равна нулю $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$, тогда $\dot{x}_C = \dot{x}_{C_0}$ (равномерное и прямолинейное движение) или $x_C = x_{C_0}$ (отсутствие перемещения вдоль оси x).

При решении задач закон сохранения движения центра масс удобно записывать в перемещениях:

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0,$$

где m_k – масса k -й материальной точки;

Δx_k – абсолютное перемещение k -й материальной точки (абсолютное перемещение точки приложения силы тяжести).

11.6. Осевой момент инерции тела

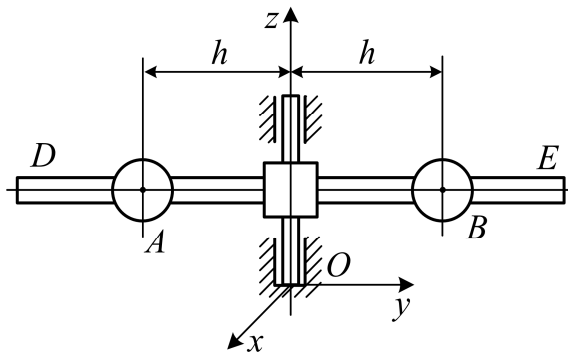


Рис. 11.2

Положение центра масс не полностью характеризует распределение масс системы. Например (рис. 11.2), если расстояния h от оси Oz каждого из одинаковых шаров A и B увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это отразится на движении системы (вращение вокруг оси Oz при прочих равных условиях будет происходить

медленнее). [3, с. 47]

Для характеристики распределения масс системы (тела) относительно некоторой оси z (рис. 11.3) служит **осевой момент инерции**, равный сумме произведений масс всех точек системы (тела) на квадраты их расстояний h_i до этой оси:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (11.7)$$

Из определения следует, что момент инерции тела относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю. Единица измерения момента инерции – $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. осевой момент инерции является *мерой инертности* тела при вращательном движении.

Часто при определении момента инерции тела (особенно тела неправильной формы) пользуются понятием радиуса инерции тела относительно оси. **Радиус инерции тела** относительно оси определяет величину, равную расстоянию от данной оси до такой точки, в которой нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции точечной массы был равен моменту инерции тела относительно оси. Обозначим радиус инерции относительно оси z через ρ_z , тогда

$$J_z = m\rho_z^2,$$

где m – масса тела.

Если система материальных точек представляет собой однородное твердое тело плотности ρ , то его следует рассматривать как множество частиц с массами $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$, где ΔV_i – объем i -ой частицы (для объемного тела), или $\Delta m_i = \rho \Delta S_i$ (для материальной поверхности), или $\Delta m_i = \rho \Delta l_i$ (для материальной кривой). Устремляя затем размеры частиц к нулю, а индекс i – к бесконечности, в пределе получаем, соответственно:

$$J_z = \rho \int_{(V)} h^2 dV, \quad J_z = \rho \int_{(S)} h^2 dS, \quad J_z = \rho \int_{(l)} h^2 dl. \quad (11.8)$$

11.7. Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса – Штейнера

Между моментами инерции тела относительно двух систем параллельных осей x, y, z и x', y', z' (рис. 11.4), одна из которых имеет начало в точке O , а другая – в центре C тяжести тела, имеется связь, выражающая теорему Гюйгенса - Штейнера.

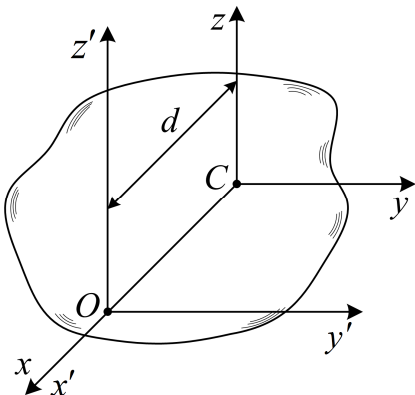


Рис. 11.4

Теорема Гюйгенса – Штейнера. Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J_{Oz'} = J_{Cz} + m \cdot OC^2 = J_{Cz} + md^2, \quad (11.9)$$

где m – масса тела;

$J_{Oz'}$ – момент инерции тела относительно оси Oz' ;

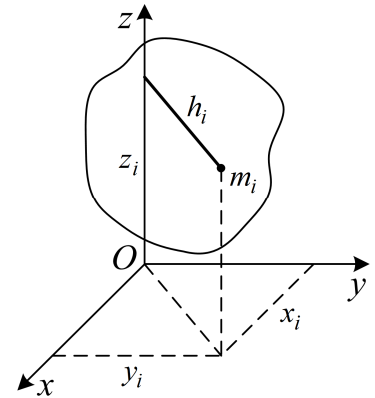


Рис. 11.3

J_{Cz} – момент инерции тела относительно оси Cz ;

$OC = d$ – расстояние между осями Oz' и Cz .

Из формулы (11.9) следует, что осевой момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, имеет наименьшую величину.

11.8. Примеры вычисления осевых моментов инерции некоторых однородных тел

Рассмотрим примеры вычисления осевых моментов инерции тел. [2, с. 272; 3, с. 48]

11.8.1. Однородный тонкий стержень

Требуется вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длины l и массы m относительно оси, проходящей через его конец.

Выделим элемент длины dx массы $dm = \rho S dx$, лежащий на расстоянии x от оси Oz , перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (рис. 11.5). Здесь S – площадь поперечного сечения стержня.

Момент инерции стержня относительно оси Oz согласно формуле (11.8) равен:

$$J_{Oz} = \rho \int_0^l x^2 S dx = \rho S \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho S l^3}{3}.$$

С учетом того, что плотность стержня равна $\rho = \frac{m}{Sl}$, получаем

$$J_{Oz} = \frac{ml^2}{3}.$$

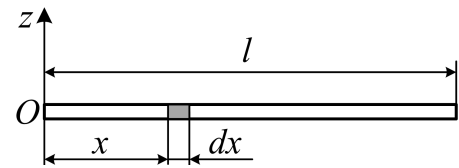


Рис. 11.5

11.8.2. Круглый однородный диск или цилиндр

Требуется вычислить момент инерции однородного диска радиуса R и массы m относительно оси симметрии Cz , перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр тяжести (рис. 11.6, а).

Выделим элементарное кольцо радиуса r и шириной dr (рис. 11.6, б).

Площадь этого кольца $dS = 2\pi r dr$, а масса $dm = \rho Sh = \rho 2\pi r dr h$, где h – толщина диска.

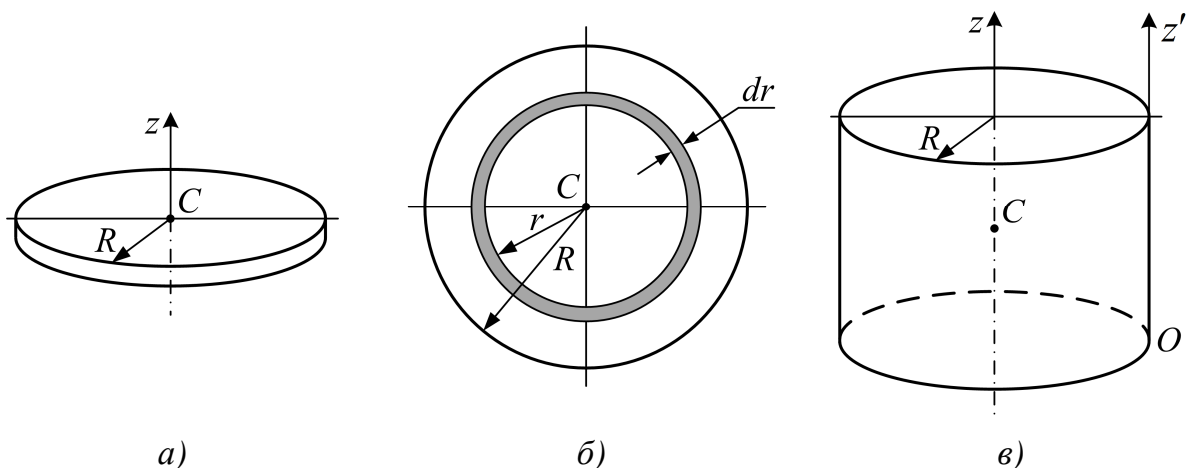


Рис. 11.6

Тогда с использованием (11.8) момент инерции диска относительно оси Cz :

$$J_{Cz} = \rho \int_0^R r^2 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi \rho h R^4}{4} = \frac{\pi \rho h R^4}{2}.$$

С учетом того, что плотность стержня равна $\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$, получаем

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}. \quad (11.10)$$

Формула (11.10) справедлива, очевидно, и для момента инерции J_{Cz} однородного круглого цилиндра относительно его оси Cz (рис. 11.6, в):

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2},$$

где m – масса цилиндра.

Вычислим момент инерции цилиндра относительно оси $Oz' \parallel Cz$, касательной к боковой поверхности цилиндра, воспользовавшись теоремой Гюйгенса - Штейнера (рис. 11.6, в):

$$J_{Oz'} = J_{Cz} + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

11.8.3. Тонкое круглое кольцо

Требуется вычислить момент инерции тонкого круглого кольца радиуса R и массы m относительно оси симметрии Cz , перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр тяжести.

Все точки кольца находятся от оси Cz на одинаковом расстоянии R , поэтому, используя формулу (11.7), получаем

$$J_{Cz} = \sum_{i=1}^n m_i R^2 = mR^2.$$

Очевидно, такой же результат получим для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы m и радиуса R относительно ее оси симметрии.

Выражения для определения осевых моментов инерции других однородных тел правильной формы можно найти в справочной и учебной литературе, например, [3, с. 52; 10, с. 161].

Моменты инерции неоднородных тел и тел сложной формы определяются экспериментально с использованием малых крутильных колебаний, качаний, падающего груза.

11.9. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции

Осевой момент инерции тела относительно оси не полностью характеризует распределение масс в твердом теле. [3, с. 116]

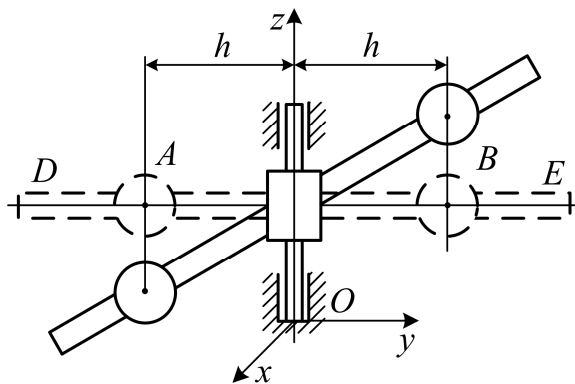


Рис. 11.7

Например, если стержень DE на рис. 11.2 повернуть в плоскости Oyz так, чтобы угол между ним и осью Oz не был прямым, а расстояния h шаров A и B от оси Oz сохранить (рис. 11.7), то ни положение центра масс, ни момент инерции относительно оси Oz не изменится. Между тем распределение масс станет другим (симметрия относительно оси Oz нарушится) и это проявится в возникновении дополнительных давлений на подшипники в случае вращения системы относительно оси Oz .

В качестве характеристик, учитывающих асимметрию в распределении масс системы, вводят так называемые центробежные моменты инерции.

По отношению к координатным осям декартовой системы отсчета **центробежными моментами инерции** называются величины J_{xy} , J_{yz} , J_{xz} , равные, соответственно

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i, \quad (11.11)$$

где m_i – масса i -ой точки; x_i , y_i , z_i – координаты i -ой точки.

Очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$ и т.д.

Для сплошных тел формулы (11.11) принимают вид $J_{xy} = \rho \int_{(V)} xy dV$ и т.д.,

где ρ – плотность тела; V – объем тела.

В отличие от осевых моментов инерции центробежные моменты инерции могут быть не только положительными, но и отрицательными и равными нулю.

Если координатная ось Oz является осью материальной симметрии тела, то следующие два центробежных момента обращаются в нуль:

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0.$$

Ось Oz , для которой центробежные моменты инерции J_{xz} , J_{yz} , содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется **главной осью инерции тела** для точки O .

Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции для любой своей точки.

Если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O , в которой ось пересекает плоскость симметрии.

Если все центробежные моменты относительно координатных осей равны нулю, т.е.

$$J_{xy} = 0, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{xz} = 0,$$

то каждая из координатных осей является главной осью инерции тела для точки O (начала координат).

Например, на рис. 11.8 координатные оси x , y , z являются главными осями инерции тела для точки O , причем ось z – как ось симметрии, а оси x и y – как оси, перпендикулярные плоскостям симметрии тела.

Главные оси инерции, построенные для центра масс, называют **главными центральными осями инерции тела**.

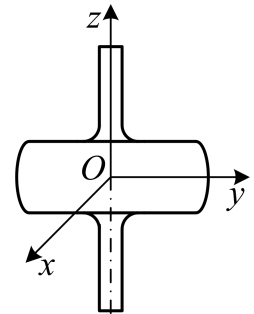


Рис. 11.8

Лекция 12. Меры механического движения.

Меры действия сил

Меры механического движения: количество движения (импульс) материальной точки и механической системы, момент количества движения материальной точки и кинетический момент механической системы, кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Меры действия сил: импульс силы, работа силы и момента, мощность силы и момента.

Механическое движение материальных объектов характеризуется их массами и скоростями. В качестве мер механического движения рассматриваются количество движения (импульс), момент количества движения (кинетический момент) и кинетическая энергия. Первые две меры механического движения являются векторными, третья мера – скалярной. [2, с. 276]

12.1. Меры механического движения

12.1.1. Количество движения материальной точки и механической системы

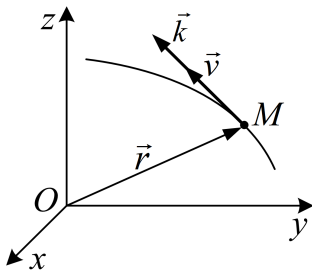


Рис. 12.1

Количество движения материальной точки M – векторная мера ее механического движения, равная произведению массы точки на ее скорость [2, с. 276]:

$$\vec{k} = m\vec{v}.$$

Вектор \vec{k} направлен так же, как и скорость \vec{v} точки, т.е. по касательной к траектории (рис. 12.1).

Количество движения точки часто называют **импульсом материальной точки**.

Проекции количества движения точки на прямоугольные декартовы оси координат:

$$k_x = m\dot{x}, \quad k_y = m\dot{y}, \quad k_z = m\dot{z}.$$

Количество движения механической системы – векторная сумма количеств движения всех точек системы, т.е. их главный вектор:

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n \vec{k}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Проекции количества движения системы на прямоугольные декартовы оси координат:

$$K_x = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i, \quad K_y = \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i, \quad K_z = \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i.$$

Модуль количества движения:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}.$$

Вектор количества движения системы \vec{K} в отличие от вектора количества движения \vec{k} , не имеет определенной точки приложения.

Учитывая $m\vec{v}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ (11.3), выразим количество движения системы в следующем виде:

$$\vec{K} = m\vec{v}_C. \quad (12.1)$$

Таким образом, *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.*

Из формулы (12.1) видно: если тело движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю.

Количество движения характеризует только поступательное движение тела. При сложном движении величина \vec{K} характеризует только поступательную часть движения вместе с центром масс.

Единица измерения количества движения – кг·м/с или Н·с.

В литературе можно встретить иное обозначение количества движения материальной точки (механической системы), например, $q(Q)$ или $p(P)$.

12.1.2. Момент количества движения материальной точки. Кинетический момент механической системы

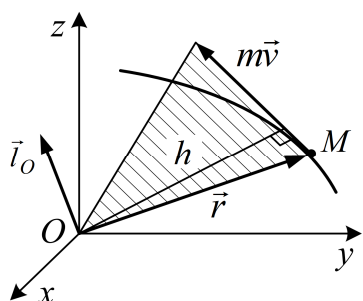


Рис. 12.2

Момент количества движения материальной точки M относительно некоторого центра O – векторное произведение радиус-вектора \vec{r} , направленного из центра O в точку M , на вектор \vec{k} количества движения материальной точки [3, с. 58]:

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Модуль вектора $|\vec{l}_O| = mvh$, где h – плечо вектора

относительно центра O . Вектор \vec{l}_O приложен в центре O , перпендикулярен плоскости, проходящей через вектор \vec{k} и центр O , и направлен так, что с его конца движение точки вокруг центра O видно против хода часовой стрелки (рис. 12.2). [2, с. 278]

Момент количества движения материальной точки относительно оси – это алгебраическая величина, равная моменту проекции $m\vec{v}_1$ вектора $m\vec{v}$ на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью:

$$l_z = \pm mv_1 h,$$

где h – плечо вектора $m\vec{v}_1$ относительно точки O (рис. 12.3).

Момент количества движения относительно оси считается *положительным*, если, глядя с положительного направления оси, увидим поворот вектора $m\vec{v}$ по отношению к точке O направленным против движения часовой стрелки, и *отрицательным* – в противном случае.

Между моментом количества движения точки относительно центра и оси, проходящей через этот центр, существует связь, аналогичная связи моментов силы относительно центра и оси.

На рис. 12.3 \vec{l}_O – момент количества движения точки относительно центра; l_z – момент количества движения точки относительно оси. Связь между ними следующая:

$$l_z = l_O \cos \alpha.$$

Кинетический момент механической системы или **главный момент количеств движения точек системы относительно центра** – вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{l}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i.$$

Кинетический момент механической системы или **главный момент количеств движения точек системы относительно оси** – алгебраическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно этой оси:

$$L_z = \sum_{i=1}^n l_{z_i} = \sum_{i=1}^n m_i v_i h_i.$$

Рассмотрим способы вычисления кинетического момента твердого тела при различных случаях движения. [3, с. 59]

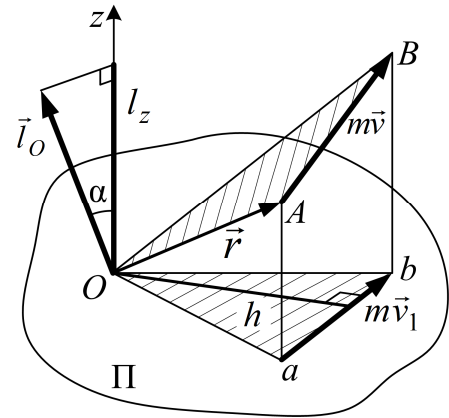


Рис. 12.3

1. Поступательное движение. Твердое тело массы m движется поступательно со скоростью \vec{v}_C .

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижной точки O :

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}_C = m \vec{r}_C \times \vec{v}_C = \vec{r}_C \times \vec{K}.$$

Кинетический момент твердого тела относительно оси z :

$$L_z = \pm Kh,$$

где h – плечо вектора количества движения, приложенного в центре тяжести тела, относительно оси z .

Знак плюс берется в том случае, когда момент вектора \vec{K} относительно оси z направлен против часовой стрелки. В противном случае берется знак минус.

2. Вращательное движение. Твердое тело массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси z .

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения:

$$L_z = \sum_{i=1}^n r_i \cdot m_i v_i = \sum_{i=1}^n r_i \cdot m_i \omega r_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Согласно (11.7) сумма, стоящая в правой части полученного выражения, является осевым моментом J_z инерции твердого тела, следовательно,

$$L_z = \pm \omega J_z.$$

Знак плюс берется в том случае, если с конца оси z вращение тела видится против часовой стрелки.

Иногда требуется определить кинетический момент не относительно оси $O'z$ вращения, а относительно оси Oz , ей параллельной. В этом случае следует вычислить кинетический момент относительно точки O , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку O' . Кинетический момент вращающегося тела относительно оси Oz будет определяться по следующей формуле:

$$L_{Oz} = \pm Kh \pm \omega J_{O'z},$$

где h – плечо вектора \vec{K} количества движения тела, приложенного в точке O' , относительно оси z .

Знак плюс перед первым слагаемым берется в том случае, когда момент вектора \vec{K} относительно точки O совпадает с положительным направлением оси Oz , а перед вторым – когда вектор $\vec{\omega}$ направлен в ту же сторону, что и ось Oz .

3. Плоскопараллельное движение. Твердое тело массы m движется поступательно вместе с центром тяжести со скоростью v_C и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси Cz , проходящей через центр тяжести.

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижного центра O :

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{K} + \vec{\omega} J_{Cz}.$$

Таким образом, при плоскопараллельном движении кинетический момент тела относительно некоторой неподвижной точки O равен геометрической сумме двух слагаемых: момента количества движения \vec{K} , приложенного в центре тяжести, относительно точки O и кинетического момента тела в его вращательном движении вокруг центра тяжести.

Кинетический момент тела, находящегося в плоскопараллельном движении, относительно оси Oz :

$$L_{Cz} = \pm Kh \pm \omega J_{Cz},$$

где h – плечо вектора количества движения тела относительно оси Oz .

Правило выбора знаков в формуле такое же, как и описанное ранее.

Единица измерения момента количества движения материальной точки (кинетического момента механической системы) – $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ или $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

В литературе можно встретить иное обозначение момента количества движения материальной точки (кинетического момента механической системы), например, $k(K)$.

12.1.3. Кинетическая энергия материальной точки, механической системы и твердого тела

Кинетическая энергия точки – скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$E_k = \frac{mv^2}{2},$$

где m и v – масса и скорость материальной точки, соответственно.

Кинетическая энергия системы материальных точек – скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Главное отличие кинетической энергии от двух других мер механического движения состоит в том, что величина E_k является величиной скалярной и существенно положительной (равна нулю только при покое всех точек).

Кинетическая энергия не зависит от направления движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

Если механическая система состоит из нескольких тел, то кинетическая энергия системы равна алгебраической сумме кинетических энергий всех тел.

Рассмотрим способы вычисления кинетической энергии при различных случаях движения. [2, с. 281; 3, с. 67]

1. Поступательное движение. Кинетическая энергия твердого тела массы m , движущегося поступательно со скоростью \vec{v} :

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (12.2)$$

2. Вращательное движение. Кинетическая энергия твердого тела массы m , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси Oz :

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_{Oz} \omega^2}{2}, \quad (12.3)$$

где J_{Oz} – осевой момент инерции.

Сравнивая правые части выражений (12.2) и (12.3), заключаем, что осевой момент инерции во вращательном движении тела играет ту же роль что масса в поступательном, т.е. является мерой инертности тела во вращательном движении.

3. Плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия твердого тела массы m , движущегося поступательно вместе с центром тяжести со скоростью v_C и вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси Cz , проходящей через центр тяжести:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_{Cz} \omega^2}{2}. \quad (12.4)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии при вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс.

При вычислении кинетической энергии системы или твердого тела, совершающих сложное движение, часто пользуются **теоремой Кенига** (1751): *кинетическая энергия системы в абсолютном движении равна сумме двух слагаемых: кинетической энергии центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии системы в ее движении относительно поступательно движущихся координатных осей вместе с центром масс:*

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + E_{k \text{ отн.}}$$

Единица измерения кинетической энергии – $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ или $\text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$.

В литературе можно встретить иное обозначение кинетической энергии, например, K , T .

12.2. Меры действия сил

В статике были введены понятия главного вектора и главного момента системы сил относительно центра. Каждая из этих величин представляет меру действия сил.

В динамике рассматриваются также другие меры действия сил: *импульс, работа и мощность силы*.

12.2.1. Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. [2, с. 286]

Элементарный импульс силы – векторная мера действия силы за элементарный промежуток времени dt :

$$d\vec{S} = \vec{F}dt.$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы.

Импульс силы \vec{F} за конечный промежуток времени (t_1, t_2) равен интегральной сумме соответствующих элементарных импульсов:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt.$$

Если на точку действуют несколько сил, то импульс равнодействующей этих сил равен сумме импульсов составляющих сил.

В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции.

Проекции импульса силы на оси координат вычисляются по формулам

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$

Модуль импульса силы:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Единица измерения импульса силы – Н·с или 1 кг·м/с.

12.2.2. Работа силы и момента

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при его перемещении, вводится понятие работы силы.

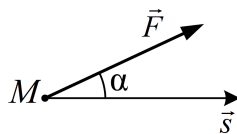


Рис. 12.4

Пусть сила \vec{F} постоянна по величине и направлению и траекторией точки приложения силы является прямая, причем \vec{s} – вектор перемещения точки M (рис. 12.4). [2, с. 287]

Работа силы – скалярное произведение силы на перемещение точки приложения силы, т. е.

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (12.5)$$

или

$$A = F_s \cos \alpha = F_s s,$$

где F_s – проекция силы на направление перемещения.

Работа будет положительной, если угол α – острый, отрицательной – если угол α тупой, и равна нулю при $\alpha = 90^\circ$.

Если сила изменяется по величине и направлению или траектория точки приложения будет криволинейной, то вводится понятие об *элементарной работе силы на бесконечно малом перемещении*.

Рассмотрим движение точки в некоторой системе отсчета $Oxyz$, заданное векторным способом (рис. 12.5). Здесь M_1M_2 – отрезок траектории точки, \vec{F} – приложенная к точке сила, \vec{r} – радиус-вектор точки, $d\vec{r}$ – вектор элементарного перемещения; α – угол между силой и направлением движения (скоростью точки). [2, с. 288]

На элементарном перемещении $d\vec{r}$ можно считать постоянной силу \vec{F} и вычислить элементарную работу с использованием формулы (12.5).

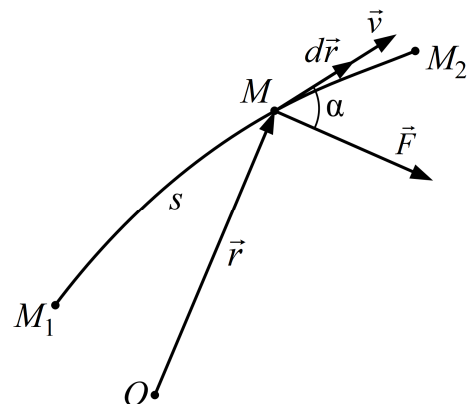


Рис. 12.5

Элементарная работа силы – мера действия силы, равная скалярному произведению силы на элементарное перемещение:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Вычисляя скалярное произведение, получаем выражение элементарной работы в виде

$$\delta A = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha$$

или

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (12.6)$$

Использование той или иной формулы зависит от того, как заданы сила и перемещение.

Из кинематики известно определение скорости при векторном и естественном способах задания движения точки: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}$.

В данном случае можно записать следующую формулу для вычисления элементарной работы:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = F v \cos \alpha dt = F \cos \alpha ds = F_\tau ds, \quad (12.7)$$

где F_τ – проекция силы на направление касательной;

s – дуговая координата точки;

ds – элементарное перемещение точки приложения силы.

Из формулы (12.7) видно, что работу совершает только касательная составляющая силы.

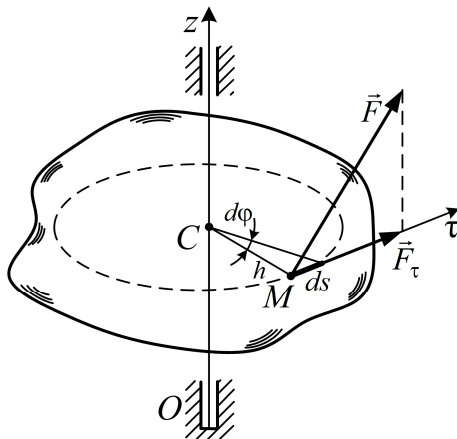


Рис. 12.6

Элементарная работа силы F , приложенной к вращающемуся телу (рис. 12.6), равна

$$\delta A = F_\tau ds = F_\tau h d\phi. \quad (12.8)$$

где ds – элементарное перемещение точки приложения силы, $ds = h d\phi$;

$d\phi$ – элементарный угол поворота тела [3, с. 101].

Произведение $F_\tau h$, содержащееся в (12.8), представляет собой момент силы F относительно оси вращения:

$$M_z = F_\tau h. \quad (12.9)$$

Подставляя (12.9) в (12.8), получаем

$$\delta A = M_z d\varphi.$$

Работа силы на конечном перемещении равна интегралу от элементарной работы силы на конечном перемещении. Если точка перемещается из положения M_1 в положение M_2 (рис. 12.7), то:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \alpha ds = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

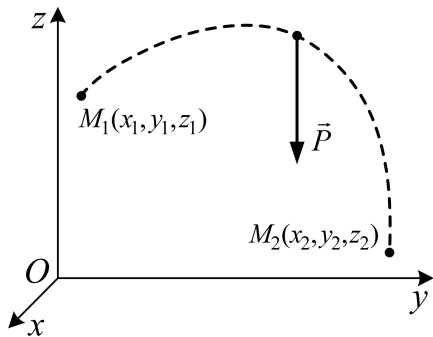


Рис. 12.7

Этот интеграл является криволинейным интегралом, и следовательно, в общем случае работа силы зависит от формы траектории.

Если элементарная работа силы dA будет полным дифференциалом некоторой функции от координат точки, то работа силы на конечном перемещении не будет зависеть от вида траектории. Силы, обладающие таким свойством, называются **потенциальными**. [3, с. 100]

Элементарная работа момента (силы, приложенной к вращающемуся телу) определяется как произведение момента на элементарный угол поворота тела:

$$\delta A = M_z d\varphi.$$

Полная работа момента (силы, приложенной к вращающемуся телу) равна интегралу от элементарной работы момента на конечном угловом перемещении:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi.$$

Если момент постоянный, то

$$A = M_z \varphi.$$

Работа внутренних сил равна нулю для неизменяемой системы, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не меняются. В частности, такой системой является нерастяжимая нить или система, состоящая из твердых тел, соединенных между собой шарнирами или нерастяжимыми идеальными нитями.

Единица измерения работы силы и момента – $\text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ или $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$.

Рассмотрим частные случаи вычисления работы силы.

12.2.3. Мощность силы и момента

Мощность характеризует быстроту совершения работы силы во времени. [2, с. 290]

Мощность силы – величина, измеряемая отношением элементарной работы силы к элементарному промежутку времени ее совершения:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (12.10)$$

При расчетах также пользуются понятием *средней мощности силы*, т.е. отношением работы силы к промежутку времени, в течение которого совершена эта работа:

$$N_{\text{cp}} = \frac{A}{\Delta t}.$$

Подставив в (12.10) значение элементарной работы, получим

$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z.$$

Мощность силы равна скалярному произведению силы на скорость точки приложения силы. [3, с. 99]

Представив выражение мощности в виде $N = F_{\tau} v$, отметим, что у двигателя, имеющего заданную мощность, сила тяги F_{τ} будет тем больше, чем меньше скорость движения. Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигателя двигаться с меньшей скоростью и развивать большую силу тяги. [2, с. 290]

Мощность силы, приложенной к вращающемуся телу, вычисляется по формуле:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\phi}{dt} = M_z \omega.$$

Мощность момента равна произведению момента на угловую скорость тела.

Единица измерения мощности силы и момента – Дж/с = Вт.

Лекция 13. Общие теоремы динамики

Теорема об изменении количества движения. Теорема об изменении кинетического момента. Теорема об изменении кинетической энергии. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

Общие теоремы динамики основаны на законах Ньютона и являются их следствиями. Для материальной точки общие теоремы динамики представляют собой преобразованное к той или иной форме основное уравнение динамики точки.

Общие теоремы связывают изменение мер механического движения с мерами действия сил. Общие теоремы динамики не дают возможности получить закон движения каждой точки механической системы. Они позволяют исследовать изменение мер механического движения изучаемого объекта (точки, тела и системы). [2, с. 298]

13.1. Теорема об изменении количества движения

Теорема об изменении количества движения используется в двух формах: дифференциальной и конечной (интегральной).

13.1.1. Дифференциальная форма

Теорема об изменении количества движения (дифференциальная форма).
Производная по времени от количества движения системы равна сумме всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (13.1)$$

Доказательство. Из теоремы о движении центра масс:

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \frac{d m \vec{v}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow \frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e.$$

Теорема доказана.

13.1.2. Конечная форма

Теорема об изменении количества движения (конечная форма).
Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на систему, за тот же промежуток времени:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e.$$

Доказательство. В результате интегрирования дифференциального уравнения (13.1) находим:

$$d\vec{K} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e dt \Rightarrow \int_{K_1}^{K_2} d\vec{K} = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e dt \Rightarrow \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e.$$

Теорема доказана.

Следствия

1. Внутренние силы, действующие между точками механической системы, не влияют на изменение количества движения системы.

2. *Закон сохранения количества движения*: если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то количество движения системы не изменяется.

3. Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось постоянна. [7, с. 94]

Теорема об изменении количества движения применяется для исследования движения тел переменной массы и сплошных сред, а также в изучении явления удара.

Законом сохранения количества движения объясняется отдача при реактивном движении, которая появляется при отделении от тела с некоторой скоростью какой-либо его части. Так, при движении ракеты отделяющейся частью является струя газов, образующихся при сгорании топлива. Когда реактивная струя с большой скоростью вырывается из ракеты, то ракета вследствие отдачи устремляется в противоположную сторону. [2, с. 302]

13.2. Теорема об изменении кинетического момента

13.2.1. Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e). \quad (13.2)$$

Доказательство. Рассмотрим движение произвольной точки системы $m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, либо $\frac{dm_k \vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, умножим векторно слева на радиус-вектор \vec{r}_k :

$$\vec{r}_k \times \frac{dm_k \vec{v}_k}{dt} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_k^i).$$

Выполняя суммирование по всем точкам системы, с учетом свойства внутренних сил находим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e).$$

Теорема доказана.

13.2.2. Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси

Проектируя равенство (13.2) на ось Oz , устанавливаем теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси. [7, с. 97]

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой оси:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e),$$

где L_x, L_y, L_z – кинетические моменты системы относительно осей;
 $M_x(\vec{F}_k^e), M_y(\vec{F}_k^e), M_z(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно этих осей.

Следствия

1. Внутренние силы, действующие между точками механической системы, не влияют на изменение кинетического момента механической системы.

2. *Закон сохранения кинетического момента:* если главный момент внешних сил системы относительно неподвижного центра (оси) равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра (оси) остается постоянным по модулю и по направлению.

3. Теорема моментов доказана относительно неподвижного центра и относительно неподвижной оси, т.е. для абсолютного движения системы в основной системе отсчета. Можно доказать, что теорема в такой же форме справедлива и для относительного движения, если подвижная система отсчета совершает поступательное движение вместе с центром масс по отношению к данной инерциальной системе отсчета. [2, с. 304]

13.2.3. Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс

Теорема об изменении кинетического момента механической системы сохраняет свою форму в системе отсчета, которая движется поступательно вместе с центром масс.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс в системе отсчета, которая движется

поступательно вместе с центром масс, равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра масс:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_C (\vec{F}_k^e).$$

Доказательство. В подвижной (неинерциальной) системе координат теорема об изменении кинетического момента принимает вид

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_C (\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_C (\vec{\Phi}_k^e),$$

где $\vec{\Phi}_k^e = -m_k \vec{a}_C$ – переносные силы инерции.

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_C (\vec{\Phi}_k^e) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times (-m_k \vec{a}_C) = -\left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \right) \times \vec{a}_C = -m \vec{r}_C \times \vec{a}_C = 0,$$

т.к. радиус-вектор центра масс в выбранной подвижной системе координат равен нулю. Теорема доказана.

13.3. Теорема об изменении кинетической энергии

13.3.1. Три формы теоремы об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии устанавливает связь между мерой механического движения – кинетической энергией и мерой действия силы – работой или мощностью. Теорема может быть сформулирована в трех формах. [2, с. 308]

1. Теорема об изменении кинетической энергии на элементарном перемещении. Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действующих на систему:

$$dE_K = \sum_{k=1}^n \delta A_k^e + \sum_{k=1}^n \delta A_k^i.$$

2. Теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему, на этом перемещении:

$$E_K - E_{K0} = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

3. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, выраженная через мощность. Производная от кинетической энергии по

времени равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему:

$$\frac{dE_{\kappa}}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{k=1}^n N_k^i.$$

Доказательство для материальной точки. Пусть точка M перемещается из положения M_1 в положение M_2 (рис. 13.1) и \vec{F} – равнодействующая всех сил, действующих на точку. [2, с. 309]

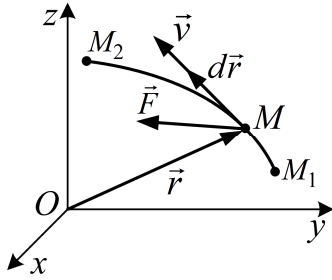


Рис. 13.1

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m\vec{a} = \vec{F}^e + \vec{F}^i$$

и умножим обе части равенства на элементарное перемещение точки $d\vec{r}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F}^e d\vec{r} + \vec{F}^i d\vec{r}. \quad (13.3)$$

В правой части выражения (13.3) стоят элементарные работы равнодействующих внешних и внутренних сил, соответственно. Левую часть выражения (13.3) можно представить в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_{\kappa},$$

причем учтено, что $\vec{v}^2 = v^2$ – скалярный квадрат любого вектора равен квадрату его модуля.

Получаем *теорему в дифференциальной форме*:

$$dE_{\kappa} = \delta A^e + \delta A^i, \quad (13.4)$$

где δA^e и δA^i – элементарные работы равнодействующих внешних и внутренних сил, соответственно.

Для элементарного перемещения теорема доказана.

Проинтегрировав обе части равенства (13.4) в пределах, соответствующих точкам M_1 и M_2 , получим *теорему в конечной форме*:

$$E_{\kappa} - E_{\kappa 0} = A^e + A^i. \quad (13.5)$$

Разделив обе части выражения (13.5) на элементарный промежуток времени dt и учитывая $N = \frac{\delta A}{dt}$, получаем *теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*:

$$\frac{dE_{\kappa}}{dt} = N^e + N^i.$$

Доказательство для механической системы. Возьмем одну из точек системы массой m_k . На эту точку действуют внешние и внутренние силы – \vec{F}_k^e и \vec{F}_k^i (равнодействующие соответствующих сил). На основании доказанной выше теоремы для точки [2, с. 310]:

$$dE_{\kappa k} = \delta A_k^e + \delta A_k^i, \quad (13.6)$$

где δA_k^e и δA_k^i – элементарные работы внешних и внутренних сил.

Просуммируем обе части выражения (13.6) по всем точкам системы:

$$dE_{\kappa} = \sum_{k=1}^n \delta A_k^e + \sum_{k=1}^n \delta A_k^i. \quad (13.7)$$

Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих начальному и конечному положениям, получим

$$E_{\kappa} - E_{\kappa 0} = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i. \quad (13.8)$$

Разделив обе части выражения (13.7) на элементарный промежуток времени dt , учитывая, что $N = \frac{\delta A}{dt}$ – мощность силы, получаем теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{dE_{\kappa}}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{k=1}^n N_k^i. \quad (13.9)$$

Теорема доказана.

Использование той или иной формы теоремы определяется навыками, полученными при решении задач. При определении *скоростей* точек тел удобно

использовать теорему на конечном перемещении в форме (13.8). Для определения *ускорений* находится производная по времени от выражения (13.8), причем конечное перемещение является произвольным. Для определения ускорений удобно теорему об изменении кинетической энергии записывать через мощность в форме (13.9).

13.3.2. Теорема об изменении кинетической энергии для систем с идеальными связями

В теоретической механике часто рассматриваются системы с идеальными связями. Если все действующие силы, как внешние, так и внутренние, разделить на активные и реакции связей, то теорему на элементарном перемещении можно записать в виде

$$dE_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}} + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{реакц}}.$$

Связи, наложенные на систему, называются *идеальными*, если выполняется условие $\sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{реакц}} = 0$. Примерами идеальных связей являются: неподвижная гладкая поверхность, неподвижный шарнир без трения, шероховатая поверхность для катящегося без скольжения тела. [2, с. 311]

Для системы с идеальными связями теорема примет вид

$$dE_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{акт}}, \quad E_k - E_{k0} = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{акт}}.$$

Изменение кинетической энергии системы с идеальными связями на элементарном и конечном перемещениях равно сумме работ всех активных сил (внешних и внутренних).

Соответственно в записи теоремы через мощность $\frac{dE_k}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^{\text{акт}}$ учитывается мощность только активных сил.

13.3.3. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

Пространство, в котором на помещенную в него материальную точку действует сила, величина и направление которой зависят только от координат этой точки, называется *силовым полем*. [3, с. 142]

В теоретической механике особое значение имеют поля, в которых элементарная работа силы, действующей на пробную точку, представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$. Такие поля называются *потенциальными*.

При этом под x, y, z подразумеваются координаты точки поля, в которой находится пробная точка.

Функция $U(x, y, z)$ является однозначной функцией координат и носит название **силовой функции поля**. Сила, действующая в потенциальном поле, называется **потенциальной**. Ее проекции на оси координат связаны с силовой функцией следующим образом:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Так как в этом случае

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU(x, y, z),$$

то работа силы поля при перемещении материальной точки из положения M_1 в M_2 равна

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU = U_2 - U_1, \quad (13.10)$$

где U_1, U_2 – соответственно значения силовой функции в точках M_1 и M_2 поля.

Из (13.10) следует, что работа силы потенциального поля не зависит ни от вида траектории движения точки, ни от закона движения по этой траектории.

Силы, работа которых зависит от указанных факторов, называются **непотенциальными**. К таким силам относятся, например, силы трения и силы сопротивления среды.

Для пробной точки, движущейся в каком-либо потенциальном поле, вводится понятие **потенциальной энергии**. Она рассматривается как величина, характеризующая «запас работы» силы поля, приложенной в указанной точке.

Для возможности сравнения «запасов работы» выбирается особая точка поля, в которой «запас работы» условно принимается равным нулю. Иначе говоря, это такая точка, в которой назначается ноль отсчета силовой функции U . Эту точку будем называть **нулевой точкой поля**.

Потенциальной энергией материальной точки k в данном положении M называется скалярная величина Π_i , равная работе силы поля при перемещении материальной точки из положения M в нулевую точку поля:

$$\Pi_i = \int_{(M)}^{(0)} dA = U_0 - U,$$

или, поскольку по договоренности $U_0 = 0$,

$$\Pi_i = -U.$$

Из полученного выражения видно, что потенциальная энергия в любой точке потенциального поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.

Пусть все внешние и внутренние силы, действующие на систему, будут потенциальными и пусть система переходит из положения 1 в положение 2. Тогда для каждой из точек системы работа приложенных сил равна

$$A_i = U_2 - U_1 = \Pi_{i_1} - \Pi_{i_2} . \quad (13.11)$$

Работа сил поля для всей системы получается суммированием обеих частей (13.11) по всем точкам системы:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \Pi_1 - \Pi_2 , \quad (13.12)$$

где Π_1 , Π_2 – потенциальная энергия всей системы соответственно в начальном и конечном положениях.

Подставляя (13.12) в (13.10), получим:

$$\sum_{k=1}^n A_k = E_{k_2} - E_{k_1} = \Pi_1 - \Pi_2$$

или

$$E_{k_1} + \Pi_1 = E_{k_2} + \Pi_2 = \text{const} . \quad (13.13)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий $E = E_k + \Pi$ представляет полную механическую энергию.

Закон сохранения механической энергии. При движении системы в потенциальном поле сумма кинетической и потенциальной энергий в каждом положении системы есть величина постоянная:

$$E_k + \Pi = \text{const} .$$

Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются *консервативными*. [2, с. 312]

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается постоянной. Это можно продемонстрировать на примере свободного падения тела в среде без сопротивления (рис. 13.2, а).

На рис. 13.2, б видно, что потенциальная энергия тела уменьшается при его падении, а кинетическая энергия соответственно увеличивается.

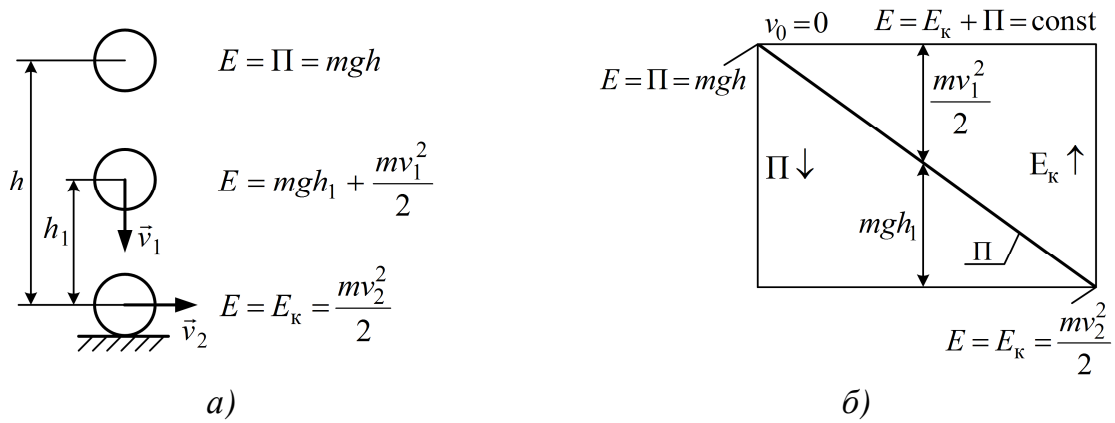


Рис. 13.2

Если на систему действуют также непотенциальные силы (например, силы сопротивления), то теорема об изменении кинетической энергии примет вид

$$E_k - E_{k0} = \Pi_0 - \Pi + A_{\text{непотенц.}},$$

или

$$(E_k + \Pi) - (E_{k0} + \Pi_0) = A_{\text{непотенц.}},$$

$$E - E_0 = A_{\text{непотенц.}}$$

В этом случае при движении системы механическая энергия изменяется, и ее изменение равно работе непотенциальных сил. [2, с. 312]

Лекция 14. Введение в аналитическую механику.

Принцип возможных перемещений

Связи в аналитической механике и их классификация. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы. Принцип возможных перемещений.

Теоретическая механика, рассмотренная ранее, носит название ньютоновской или классической механики. Отличительной чертой этой механики является то, что связи, наложенные на механическую систему, выступают в ней в виде тел, действие которых на механическую систему заменяется силами реакций.

Основы аналитической механики были заложены Эйлером в 1736 г. в монографии «Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически», посвященной динамике материальной точки.

Французский механик Лагранж создал *аналитическую механику*, в которой связи описываются уравнениями, которым подчиняются координаты и скорости точек механической системы. Выдающимся событием в ранней истории аналитической механики стал труд «Аналитической механики» Лагранжа в 1788 г. В работе Лагранж полностью отказался от геометрической трактовки в механике. Теория о равновесии и движении была сведена к некоторым общим уравнениям.

Аналитическая механика Лагранжа становится ветвью анализа, лишенного каких-либо «механических рассуждений», т.к. в ней указаны общие методы для составления уравнений любой задачи механики, после чего решение становится чисто математической проблемой. [2, с. 394]

Механика Лагранжа делится на две части: статику и динамику. Статика основана на принципе виртуальных (возможных) скоростей, в динамике Лагранж исходит из двух законов: закона инерции и закона сложения движений (по правилу параллелограмма). Аналитическая механика Лагранжа основана на общей формуле, которую сейчас называют уравнением Даламбера - Лагранжа или общим уравнением динамики.

14.1. Связи в аналитической механике и их классификация

14.1.1. Связи в аналитической механике

Свободным телом (в частности, свободной материальной точкой) является тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений. При наличии ограничений тело является *несвободным*.

Ограничения, налагаемые на положение и скорости точек тела или механической системы, которые должны выполняться при любых действующих силах, называются *связями*. [2, с. 395]

Связи – это наперед заданные дополнительные условия геометрического или кинематического характера, которые должны выполняться во время движения, включая и начальный момент времени. В большинстве случаев связи осуществляются другими телами (шарнирами, опорными поверхностями, нитями и т.д.).

В аналитической механике связи задаются математически с помощью уравнений или неравенств, в которые входят время, координаты всех или части

точек системы и их производные по времени. [7, с. 123] В общем случае уравнение связи для материальной точки имеет вид

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (14.1)$$

Для системы материальных точек в уравнения связей входят координаты и скорости нескольких точек.

Приведем примеры уравнений связей.

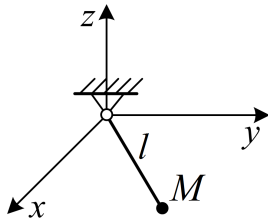


Рис. 14.1

Пример 1. Связь в виде идеального стержня, ограничивающего перемещение материальной точки $M(x, y, z)$ (рис. 14.1), записывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Пример 2. При свободном движении системы двух материальных точек $M_1(x, y, z)$ и $M_2(x, y, z)$, соединенных между собой идеальным стержнем (рис. 14.2), уравнение связи, из условия неизменности расстояния между точками, имеет вид:

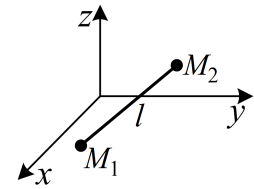


Рис. 14.2

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Положение данной системы определяется пятью независимыми параметрами, в качестве которых могут быть выбраны три декартовы координаты точки M_1 и две декартовы координаты точки M_2 , или три декартовы координаты точки M_1 и два сферических угла, определяющих положение отрезка M_1M_2 .

14.1.2. Классификация связей в аналитической механике

В зависимости от формы записи связи и параметров, от которых зависит связь (14.1), проводят классификацию связей. Связи делят на *удерживающие* и *неудерживающие*, *голономные* и *неголономные*, *стационарные* и *нестационарные*.

1. Удерживающие и неудерживающие связи

Удерживающими (двусторонними) связями называются связи, которые сохраняют свое действие во все время движения механической системы. Такие связи задаются равенствами.

Неудерживающими (односторонними) связями называются связи, которые в некоторые промежутки времени могут прекращать и возобновлять свое действие. Такие связи задаются неравенствами.

В качестве примера рассмотрим шарик (материальную точку), который может двигаться в вертикальной плоскости (рис. 14.3).

Если шарик катится по горизонтальной оси Ox (рис. 14.3, а), то связь можно описать равенством $y = 0$. Движение шарика ограничено удерживающей связью.

Если заставить шарик двигаться вдоль оси Ox и при этом подпрыгивать (рис. 14.3, б), то связь можно описать неравенством $y \geq 0$. Это пример неудерживающей связи.



Рис. 14.3

2. Голономные и неголономные связи

Если в уравнение связи не входят скорости, т.е. ограничения наложены на координаты точек механической системы, то связь называют **голономной**. Уравнения, описывающие голономные связи, наложенные на систему, состоящую из n материальных точек, имеют вид:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Примером голономных связей могут служить связи, наложенные на кривошипно-шатунный механизм (рис. 14.4).

Если для задания положений механизма пользоваться координатами точек A и B , то уравнения связей в выбранной системе отсчета будут такими:

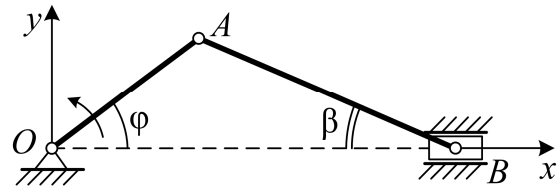


Рис. 14.4

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 &= OA^2, \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 &= AB^2, \\ y_B &= 0. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Если уравнение связи содержит скорости и не может быть проинтегрировано, то связь называют **неголономной**.

Уравнения неголономных связей выглядят следующим образом:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0.$$

В качестве примера системы с неголономными связями рассмотрим шар, который катится без скольжения по шероховатой поверхности (рис. 14.5). Центр C шара все время движения должен находиться на расстоянии r от стола H (r – радиус шара), а точка M касания шара со столом H является мгновенным центром скоростей, поскольку шар движется по столу без проскальзывания. Следовательно, уравнения связей будут такими:

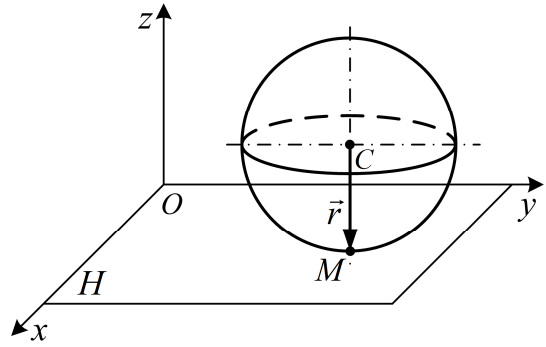


Рис. 14.5

$$\begin{aligned} z_C &= r, \\ \vec{v}_M &= \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0, \end{aligned}$$

где $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость шара.

Векторное уравнение в проекциях на оси координат дает три скалярных уравнения, из которых первые два не интегрируемы:

$$\dot{x}_C - r\omega_y = 0, \quad \dot{y}_C - r\omega_x = 0, \quad \dot{z}_C = 0. \quad (14.3)$$

Это означает, что если известно начальное и конечное положения шара, то невозможно указать траекторию, по которой перемещался центр шара из начального положения в конечное. Именно этим и характеризуются неголономными связями.

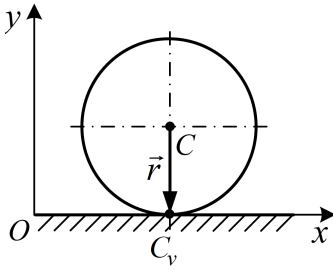


Рис. 14.6

Рассмотрим еще один пример. Пусть колесо радиуса r катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 14.6). Может показаться, что связи, наложенные на колесо, как и в предыдущем случае, являются неголономными, поскольку точка касания колеса с рельсом представляет собой мгновенный центр скоростей. Однако это не так. Уравнение связи, соответствующее рис. 14.6, а именно,

$$\vec{v}_{C_v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$$

может быть записано в проекциях на оси координат:

$$\dot{x}_C - r\dot{\phi} = 0, \quad \dot{y}_C = 0$$

и проинтегрировано:

$$x_C = r\phi, \quad y_C = r.$$

Тем самым определена траектория центра колеса при переходе из одного положения в другое (отрезок прямой, параллельной рельсу). Следовательно, связи, наложенные на колесо, являются голономными.

В данном пособии будем рассматривать механические системы только с удерживающими голономными связями.

3. Стационарные и нестационарные связи

Если время t не входит явно в уравнение (связи не изменяются с течением времени), то связь называют **стационарной**, в противном случае связь является **нестационарной**.

Приведенные выше уравнения связей описывают стационарные связи, т.к. в них явно отсутствует время. Примером системы с нестационарной связью может служить резиновая сфера, надуваемая компрессором, по наружной поверхности которой движется точка (рис. 14.7). Уравнение связи, налагающее ограничение на координаты точки, будет таким:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0,$$

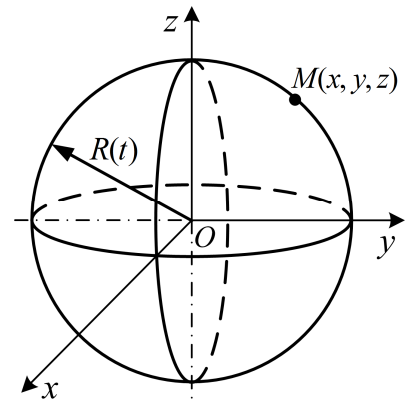


Рис. 14.7

где $R(t)$ – радиус сферы, являющийся функцией времени.

14.2. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы

Рассмотрим бесконечно малые перемещения точек системы, *совместимые со связями*, наложенными на систему (совместимость означает ненарушение связей). В число этих перемещений входят действительные перемещения, происходящие под действием приложенных сил. [3, с. 123]

Если связи не стационарны, то действительные перемещения можно представить состоящими из двух слагаемых:

- 1) перемещения, которые имели бы место, если бы связи перестали изменяться (стали бы фиксированными);
- 2) перемещения, обусловленные изменением самих связей.

Например, для сферического маятника (рис. 14.8) действительное бесконечно малое перемещение описывается вектором

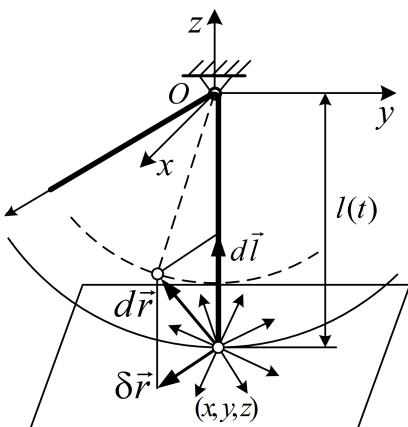


Рис. 14.8

$$d\vec{r} = \delta\vec{r} + d\vec{l},$$

где $\delta\vec{r}$ – возможное перемещение (первое слагаемое), а $d\vec{l}$ – перемещение, вызванное изменением связи (второе слагаемое).

Для дальнейшего изложения важны лишь первые слагаемые. Они называются *возможными (виртуальными) перемещениями* и определяются как воображаемые бесконечно малые перемещения, совместимые со связями, зафиксированными в данный момент.

Возможные (виртуальные) перемещения точек несвободной механической системы – воображаемые бесконечно малые перемещения точек системы, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями. [2, с. 400]

Возможные перемещения точек системы удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) это воображаемые малые перемещения;
- 2) они не нарушают наложенных связей;
- 3) для нестационарных связей их рассматривают при остановленных связях;
- 4) не зависят от действующих на систему сил (в отличие от действительных перемещений, которые определяются действующими силами).

Проекции вектора виртуального перемещения точки $\delta \vec{r} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}$ называются **вариациями координат**. [7, с. 125] Вариации координат $\delta x, \delta y, \delta z$ можно определять как дифференциалы функций, если координаты точек записаны как функции от некоторых параметров. [2, с. 400]

В случае стационарных связей действительные бесконечно малые перемещения, происходящие под действием приложенных сил, входят в число возможных перемещений. [3, с. 122]

Следует иметь в виду, что возможное перемещение системы — это некоторый геометрический образ, всецело определяемый наложенными связями и не связанный с истинным движением системы и действующими силами.

Для одной и той же механической системы может существовать множество различных возможных перемещений. Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, с помощью которых можно получить любое другое возможное перемещение.

Например, брусок, стоящий на горизонтальной плоскости (рис. 14.9), можно переместить без изменения его ориентации по самым разным направлениям по этой плоскости, и все эти бесконечно малые перемещения будут возможными, поскольку связь (плоскость) при этом не нарушится. Однако ясно, что все это множество, показанное стрелками на рис. 14.9, можно получить, произведя возможные перемещения по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Следовательно, независимых возможных перемещений у бруска, движущегося по плоскости поступательно, всего два.

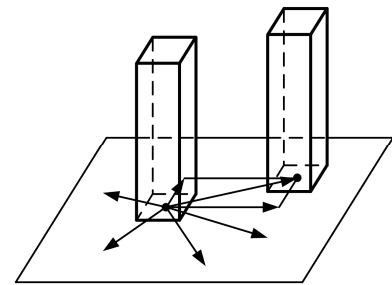


Рис. 14.9

Чем больше связей наложено на систему, тем меньше независимых возможных перемещений имеет система. Это обстоятельство характеризуется *числом степеней свободы* системы. Для систем с голономными стационарными

связями число степеней свободы равно числу независимых возможных перемещений системы.

Свободная материальная точка имеет три степени свободы, поскольку может перемещаться по любому из трех взаимно перпендикулярных направлений, например, вдоль осей x , y , z . Ни одно из указанных перемещений точки не может быть получено путем комбинации перемещений по двум другим направлениям. Следовательно, каждое из этих перемещений является независимым. Ясно, что перемещение точки в произвольном направлении можно получить комбинацией перемещений вдоль трех координатных осей.

Точка, вынужденная двигаться по заданной поверхности, имеет две степени свободы, а точка, движущаяся по пространственной кривой, имеет одну степень свободы.

Каждая связь, наложенная на систему, отнимает одну степень свободы. Если система состоит из n материальных точек и на нее наложено k голономных связей, то число степеней свободы системы равно

$$N = 3n - k. \quad (14.4)$$

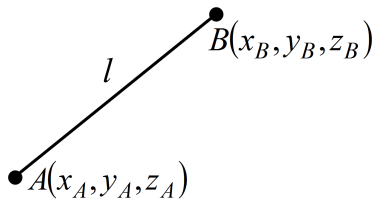


Рис. 14.10

Рассмотрим, к примеру, систему, состоящую из двух материальных точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, связанных между собой невесомым стержнем длины l (рис. 14.10). На эту систему наложена одна связь (стержень обеспечивает неизменность расстояния между точками A и B),

уравнение которой имеет вид:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2.$$

Число степеней свободы такой системы согласно (14.4) равно $N = 3n - k = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

Свободное твердое тело имеет шесть независимых возможных перемещений: три поступательных перемещения вдоль трех координатных осей и три поворота вокруг этих осей. Следовательно, оно обладает шестью степенями свободы.

При определении числа степеней свободы механизмов иногда можно пользоваться простым приемом, который продемонстрируем на кривошипно-шатунном механизме (рис. 14.4). Поскольку механизм может двигаться, то он имеет по крайней мере одну степень свободы. Закрепим мысленно какое-либо звено, например, кривошип. Если при этом другие звенья механизма могли бы двигаться, то механизм имел бы более одной степени свободы. Но поскольку при неподвижном кривошипе ни шатун, ни ползун не могут двигаться, не разрушив связи, то механизм имеет только одну степень свободы.

Пример. Рассмотрим пример определения числа степеней свободы системы (рис. 14.11).

Будем считать, что грузы A и K могут перемещаться только по вертикали. Так как система может двигаться, то, по крайней мере, одна степень свободы у нее есть. Закрепим мысленно тело E . При этом груз A может перемещаться как вверх, так и вниз. Следовательно, есть еще одна степень свободы. Если теперь помимо тела E закрепить и груз A , то тело K не сможет перемещаться по вертикали, не нарушая связи (при перемещении вниз нить порвется, а при перемещении вверх она будет не натянута). Таким образом, при условии вертикального перемещения тел A и K система, показанная на рис. 14.11, имеет две степени свободы. Если же считать, что грузы A и K могут совершать колебания в вертикальной плоскости, то система будет иметь четыре степени свободы.

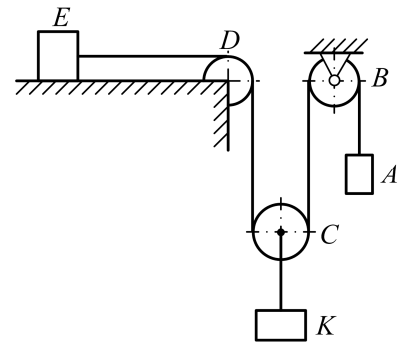


Рис. 14.11

14.3. Принцип возможных перемещений

В *геометрической статике* рассматривался способ получения условий равновесия механической системы, состоящей из сочлененных тел. Для составления этих условий механическую систему необходимо расчленять на отдельные тела и записывать уравнения равновесия для каждого из тел. Такой способ в случае сложных систем, состоящих из многих тел, оказывается малоприменимым из-за своей громоздкости. [3, с. 127]

Аналитическая статика основана на совершенно иных условиях равновесия, применимых не только к отдельным телам, но и ко всей системе в целом. Эти условия вытекают из принципа, использующего возможные перемещения системы. Покажем, как *принцип возможных перемещений* может быть получен на основе аксиом ньютоновской (геометрической) механики.

Разделим силы, приложенные к механической системе, на две группы [2, с. 404]:

- 1) *реакции идеальных связей*;
- 2) все остальные силы, которые назовем активными.

Иногда группу активных сил называют *заданными*.

Пусть механическая система с идеальными стационарными связями находится в равновесии. На произвольную точку m_i этой системы действует равнодействующая \vec{F}_i активных сил и равнодействующая \vec{R}_i сил реакций (рис. 14.12). Так как точка находится в равновесии, то

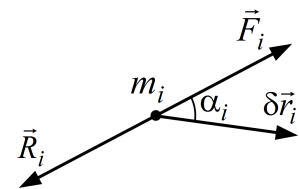


Рис. 14.12

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0. \quad (14.5)$$

Дадим точке возможное перемещение $\delta \vec{r}_i$ и умножим обе части уравнения (14.5) на $\delta \vec{r}_i$:

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (14.6)$$

Скалярное произведение вектора силы на вектор возможного перемещения точки ее приложения называют *элементарной* или *возможной (виртуальной) работой силы* и обозначают δA . С учетом этого обозначения выражение (14.6) записывается так:

$$\delta A_i(\vec{F}_i) + \delta A_i(\vec{R}_i) = 0. \quad (14.7)$$

Просуммируем обе части уравнения (14.7) по всем точкам системы:

$$\sum_i \delta A_i(\vec{F}_i) + \sum_i \delta A_i(\vec{R}_i) = 0. \quad (14.8)$$

Связи, наложенные на систему, считаются идеальными, поэтому сумма работ сил реакций этих связей на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_i \delta A_i(\vec{R}_i) = 0.$$

При этом уравнение (14.8) принимает вид:

$$\sum_i \delta A_i(\vec{F}_i) = 0 \quad (14.9)$$

или

$$\sum_i F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0, \quad (14.10)$$

где $\delta s_i = |\delta \vec{r}_i|$;

α_i – угол между силой и перемещением точки ее приложения.

В ортогональной системе координат уравнение (14.9) записывается так:

$$\sum_i (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (14.11)$$

Уравнения (14.9) – (14.11) выражают *принцип возможных перемещений* в различных формах записи.

Принцип возможных перемещений эффективен при определении реакций. Однако ни в одну из форм записи этого принципа реакции связей не входят, поскольку связи считаются идеальными.

Для возможности применения принципа возможных перемещений к системам с неидеальными связями прибегают к такому приему: *неидеальная связь с трением заменяется идеальной связью (без трения), а сила трения учитывается как активная сила.*

Этот же прием используют и при определении опорных реакций. Механическую систему освобождают от соответствующей опоры, а силу реакции учитывают как активную силу. Если же полная реакция состоит из нескольких составляющих, то характер опоры можно изменить так, чтобы только подлежащая определению реакция учитывалась бы как активная сила. Например, для определения вертикальной составляющей реакции шарнирно-неподвижной опоры ее можно заменить шарнирно-подвижной опорой, опорная плоскость катков которой горизонтальна, а вертикальную составляющую силы реакции учитывать как активную силу.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия несвободной механической системы, на которую наложены идеальные, стационарные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении из положения равновесия равнялась нулю.

Уравнение (14.9) было получено в предположении, что система находится в равновесии, т.е. (14.9) является необходимым условием равновесия. Покажем, что (14.9) является не только необходимым, но и достаточным условием равновесия системы. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что в некоторый момент времени равновесие всех или некоторых точек системы нарушается, то есть они получают ускорение. Обозначим количество таких точек через s ($1 \leq s \leq n$) и будем называть их для краткости неравновесными. Для этих точек $\vec{F}_k^a \neq -\vec{R}_k$ ($1 \leq k \leq s$) и векторы их ускорений \vec{a}_k направлены по диагонали параллелограммов, сторонами которых являются векторы \vec{F}_k^a и \vec{R}_k . При этом

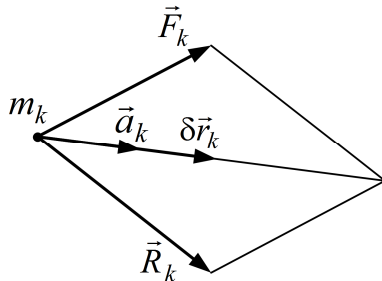


Рис. 14.13

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^a + \vec{R}_k,$$

где m_k – масса k -ой точки.

Возникшее движение является действительным и, следовательно, не нарушает связей, наложенных на систему. В момент нарушения равновесия сообщим системе такое возможное перемещение, при котором векторы возможных перемещений неравновесных точек $\delta \vec{r}_k$ по величине пропорциональны векторам их ускорений и направлены одинаково с ними (рис. 14.13). Иначе говоря, рассмотрим возможное перемещение, при котором:

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_k &= \lambda_k \cdot \vec{a}_k, \\ \lambda_k &= \text{const} > 0; \delta \vec{r}_j = 0 \text{ при } 1 \leq j \leq n - s. \end{aligned}$$

При этом λ_k имеют соответствующие размерности. Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^a + \vec{R}_i) \delta \vec{r}_i &= \sum_{k=1}^s (\vec{F}_k^a + \vec{R}_k) \delta \vec{r}_k + \sum_{j=1}^{n-s} (\vec{F}_j^a + \vec{R}_j) \delta \vec{r}_j = \\
&= \sum_{k=1}^s (\vec{F}_k^a + \vec{R}_k) \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^s (\vec{F}_k^a + \vec{R}_k) \cdot \lambda_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^s \frac{\lambda_k}{m_k} (\vec{F}_k^a + \vec{R}_k)^2 > 0
\end{aligned} \tag{14.12}$$

Так как связи, наложенные на систему, являются идеальными, то $\sum_{i=1}^n (\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = 0$ на любом возможном перемещении. Поэтому из 14.12 следует, что

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i) > 0,$$

то есть мы получаем противоречие с исходным предположением.

Таким образом, принцип **возможных перемещений** может быть сформулирован еще так: *необходимым и достаточным условием равновесия механической системы со стационарными идеальными связями является равенство нулю суммы элементарных работ всех задаваемых сил, приложенных к системе, на любом возможном перемещении системы из положения равновесия.*

Лекция 15. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Обобщенные координаты и обобщенные скорости. Обобщенные силы. Об уравнениях Лагранжа 1-го и 2-го рода. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. Уравнения Лагранжа 2-го рода для случая потенциальных сил.

15.1. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Совокупность независимых параметров любой размерности, однозначно определяющих положение механической системы в пространстве, называется **обобщенными координатами системы**.

При этом не предпринимается вопрос о том, достаточно или избыточно выбранное число обобщенных координат. Если оно избыточно, то имеются уравнения связей, которым подчиняются обобщенные координаты. Например, положение кривошипно-шатунного механизма, показанного на рис. 14.4, можно определить с помощью четырех обобщенных координат: x_A, y_A, x_B, y_B . Однако эти координаты не независимы, т.к. они связаны друг с другом тремя уравнениями связей (14.2).

Разность между полным числом обобщенных координат и числом уравнений связей, наложенных на них, определяет **число независимых обобщенных координат**. В рассмотренном кривошипно-шатунном механизме число независимых обобщенных координат равно единице. В качестве одной независимой обобщенной координаты можно было выбрать угол φ поворота кривошипа.

Любую из независимых координат можно изменять, сохраняя все остальные координаты неизменными. Ниже будет идти речь только о независимых обобщенных координатах, которые будем обозначать q_1, q_2 , и т.д.

Поскольку обобщенные координаты между собой независимы, то *вариации* $\delta q_1, \delta q_2$ и т.д. (т.е. возможные приращения обобщенных координат) тоже будут независимыми. При этом каждому приращению обобщенной координаты соответствует независимое (от других) возможное перемещение системы. Следовательно, *число независимых обобщенных координат определяет число степеней свободы системы*.

Число степеней свободы механической системы – число независимых обобщенных координат системы, либо число независимых вариаций обобщенных координат системы.

Радиус-вектор любой точки механической системы можно выразить через независимые обобщенные координаты системы:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (15.1)$$

Например, координаты точек A и B кривошипно-шатунного механизма (рис. 14.4) выражаются через независимую обобщенную координату $q = \varphi$ следующим образом:

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi, \quad x_B = r \cos \varphi + l \cos \beta, \quad y_B = 0.$$

где $\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{l^2}}.$

Обобщенные координаты являются функциями времени:

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_N = q_N(t).$$

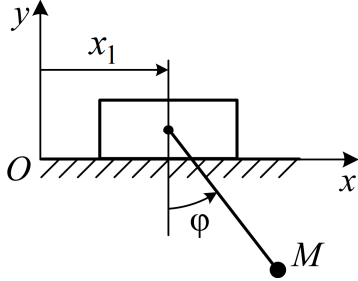


Рис. 15.1

Для эллиптического маятника, состоящего из тела, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и маятника длины l , подвешенного к этому телу, за обобщенные координаты можно принять координату x_1 и угол φ : $q_1 = x_1$, $q_2 = \varphi$ (рис. 15.1).

В случае стационарных связей декартовы координаты точки M выражаются следующим образом: $x = x_1 + l \sin \varphi$, $y = -l \cos \varphi$.

При наличии нестационарных связей, например, при переменной длине нити маятника, $l = l(t)$, $x = x_1 + l(t) \sin \varphi$, $y = -l(t) \cos \varphi$.

Производные по времени от обобщенных координат по времени называются **обобщенными скоростями** и обозначаются $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты: если q – линейная величина, то \dot{q} – линейная скорость, если q – угловая величина, то \dot{q} – угловая скорость.

15.2. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек и имеющую N степеней свободы. Пусть на систему действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Вычислим сумму элементарных работ всех сил на возможных перемещениях системы:

$$\sum \delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i), \quad (15.2)$$

где $\delta \vec{r}_i$ – полное приращение радиуса-вектора \vec{r}_i на любом возможном перемещении, получаемое из (15.1):

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \delta q_N. \quad (15.3)$$

Индекс i , соответствующий материальным точкам системы, пробегает значения от 1 до n , а индекс j , связанный со степенями свободы системы, – от 1 до N .

Подставляя (15.3) в (15.2), получаем:

$$\begin{aligned}\sum \delta A &= \sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \delta q_N \right) \right) = \\ &= \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \dots + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \dots + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \right) \delta q_N.\end{aligned}$$

Введем обозначения для выражений в скобках, стоящих при вариациях δq_i обобщенных координат:

$$Q_1 = \sum_i \left(\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right), Q_2 = \sum_i \left(\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \right), \dots, Q_j = \sum_i \left(\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right), \dots, Q_N = \sum_i \left(\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \right). \quad (15.4)$$

Тогда (15.2) можно записать в виде

$$\sum \delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_j \delta q_j + \dots + Q_N \delta q_N. \quad (15.5)$$

По аналогии с выражением $\delta A = F_\tau ds$ (12.8) коэффициенты Q_1 , Q_2 и т.д., стоящие в (15.5) при приращении обобщенных координат, называют *обобщенными силами*, причем Q_1 представляет собой обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате q_1 , Q_2 – координате q_2 и т.д.

Обобщенной силой Q_j , соответствующей обобщенной координате q_j , называется коэффициент при вариации δq_j в выражении суммы элементарных работ всех сил на возможных перемещениях системы.

Если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором только координата q_j получит приращение $\delta q_j \neq 0$, а остальные координаты не изменятся, т.е. $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{j-1} = \delta q_{j+1} = \dots = \delta q_N = 0$, то сумма элементарных работ на этом возможном перемещении, согласно (15.5), будет равна

$$\sum \delta A_j = Q_j \delta q_j.$$

Это соотношение дает более удобную, чем (15.5), формулу для вычисления обобщенной силы:

$$Q_j = \frac{\sum \delta A_j}{\delta q_j}. \quad (15.6)$$

Сумма элементарных работ в соотношении (15.6) вычисляется при условии, что только координата q_j получит ненулевое приращение, а остальные обобщенные координаты фиксированы.

Обобщенная сила, в отличие от просто силы, является не вектором, а *скаляром*, что видно из (15.4) или (15.6).

Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты: если обобщенная координата величина линейная, то обобщенная сила измеряется в Н, а если угловая, то – в Нм.

15.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода

15.3.1. Об уравнениях Лагранжа 1-го и 2-го рода

Число уравнений Ньютона, описывающих движение механической системы, определяется числом материальных точек или тел, входящих в систему. Различие в описании движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа состоит в том, что их число равно числу степеней свободы механической системы. Число степеней свободы в большинстве случаев существенно меньше числа точек и даже тел, входящих в механическую систему. Существуют уравнения Лагранжа 1-го рода и уравнения Лагранжа 2-го рода. [3, с. 142]

В *уравнения Лагранжа 1-го рода* помимо активных сил входят реакции связей, что дает возможность определять с помощью этих уравнений не только движение системы, но и эти реакции.

Уравнения Лагранжа 2-го рода в случае механических систем с идеальными связями не содержат реакций.

Для механической системы, состоящей из n материальных точек и имеющей N степеней свободы, система уравнений Лагранжа 2-го рода имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_N} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_N} = Q_N. \end{array} \right. \quad (15.7)$$

Здесь E_k – кинетическая энергия системы, $q_1, \dots, q_j, \dots, q_N$ – независимые обобщенные координаты, $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_j, \dots, \dot{q}_N$ – обобщенные скорости, $Q_1, \dots, Q_j, \dots, Q_N$ – обобщенные силы (индекс j – текущий индекс обобщенной координаты, пробегающий значения от 1 до N).

15.3.2. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

При поступательном движении в пространстве тело имеет три степени свободы: три поступательных перемещения вдоль взаимно перпендикулярных осей.

Поступательное движение тела полностью определяется движением одной, причем любой его точки. В динамике в качестве такой точки выбирают центр масс тела. Поэтому в качестве обобщенных координат выбираем координаты x , y , z центра тяжести тела:

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Составляем три уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial y} = Q_y, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial z} = Q_z. \end{cases} \quad (15.8)$$

Кинетическая энергия тела, согласно (12.2), равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2},$$

где m – масса тела.

Получаем левые части уравнений Лагранжа (15.8):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x}, & \frac{\partial E_k}{\partial x} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) &= m\ddot{y}, & \frac{\partial E_k}{\partial y} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}} \right) &= m\ddot{z}, & \frac{\partial E_k}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Определим обобщенную силу, соответствующую координате x . Для этого даем телу такое перемещение, при котором только координата x получит

приращение δx , а остальные обобщенные координаты останутся без изменения, т.е. $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Очевидно, что таким перемещением является сдвиг тела вдоль оси x . Согласно (15.6), обобщенная сила равна

$$Q_x = \frac{\sum \delta A_x}{\delta x} = \frac{\sum (F_i \delta x \cos \alpha_i)}{\delta x} = \frac{(\sum F_i \cos \alpha_i) \delta x}{\delta x} = \sum F_i \cos \alpha_i = \sum X_i, \quad (15.10)$$

где α_i – угол между вектором \vec{F}_i и осью x ;

X_i – проекция силы \vec{F}_i на ось x .

Аналогично получаем $Q_y = \sum Y_i$ и $Q_z = \sum Z_i$.

С учетом (15.9) и (15.10) первое уравнение Лагранжа (15.8) приобретает следующий вид:

$$m\ddot{x} = \sum X_i.$$

Второе и третье уравнения Лагранжа (15.8), отнесенные к обобщенным координатам $q_2 = y$ и $q_3 = z$, соответственно, выводятся аналогично и выглядят так:

$$m\ddot{y} = \sum Y_i, \quad m\ddot{z} = \sum Z_i.$$

Таким образом, дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела являются следующие уравнения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum X, \\ m\ddot{y} = \sum Y, \\ m\ddot{z} = \sum Z. \end{cases}$$

15.3.3. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела

При вращательном движении тело имеет одну степень свободы: поворот вокруг неподвижной оси. Вращательное движение твердого тела зададим вращением тела вокруг неподвижной оси Oz .

Одной степени свободы соответствует одна обобщенная координата: $q = \varphi$. Составляем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (15.11)$$

Кинетическая энергия тела, согласно (12.3), равна

$$E_k = \frac{J_{Oz} \omega^2}{2} = \frac{J_{Oz} \dot{\phi}^2}{2},$$

где J_{Oz} – осевой момент инерции относительно оси вращения Oz .
Получаем левую часть уравнения Лагранжа (15.11):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}} \right) = J_{Oz} \ddot{\phi}, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \phi} = 0. \quad (15.12)$$

Чтобы определить обобщенную силу, даем телу такое перемещение, при котором обобщенная координата ϕ получит приращение $\delta\phi$. Обобщенная сила равна:

$$Q_\phi = \frac{\sum \delta A}{\delta \phi}. \quad (15.13)$$

При вычислении числителя (15.13) воспользуемся тем обстоятельством, что элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна работе момента этой силы относительно оси вращения. Элементарная работа момента равна произведению момента на угол поворота, следовательно,

$$Q_\phi = \frac{\sum \delta A}{\delta \phi} = \frac{\sum M_{iz} \delta \phi}{\delta \phi} = \sum M_{iz}, \quad (15.14)$$

где M_{iz} – момент силы \vec{F}_i относительно оси вращения Oz .

С учетом (15.12) и (15.14) уравнение Лагранжа (15.11) приобретает следующий вид:

$$J_{Oz} \ddot{\phi} = \sum M_{iz}. \quad (15.15)$$

Уравнение (15.15) является *дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела*.

15.3.4. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела

При плоскопараллельном движении тело имеет три степени свободы: поворот вокруг оси, проходящей через некоторый полюс и перпендикулярной плоскости, параллельно которой происходит движение, и два поступательных перемещения вместе с полюсом вдоль взаимно перпендикулярных осей, лежащих в указанной плоскости. За полюс примем центр C тяжести тела.

Примем, что плоское движение тела происходит в плоскости $xу$, а поворот вокруг оси z .

Трем степеням свободы соответствуют три обобщенных координаты: $q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$. Составляем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_C} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial x_C} = Q_x, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_C} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial y_C} = Q_y, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \end{cases} \quad (15.16)$$

Кинетическая энергия тела, согласно (12.4), равна

$$E_K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega^2}{2} = \frac{m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2)}{2} + \frac{J_{Cz}\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Получаем левые части уравнений Лагранжа (15.16):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_C} \right) &= m\ddot{x}_C, & \frac{\partial E_K}{\partial x_C} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_C} \right) &= m\ddot{y}_C, & \frac{\partial E_K}{\partial y_C} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= J_{Cz}\ddot{\varphi}, & \frac{\partial E_K}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (15.17)$$

По аналогии с (15.10) и (15.14) обобщенные силы равны:

$$Q_x = \sum X_i, \quad Q_y = \sum Y_i, \quad Q_\varphi = \sum M_{iz}, \quad (15.18)$$

где M_{iz} – момент силы \vec{F}_i относительно оси вращения Cz .

С учетом (15.17) и (15.18) уравнения Лагранжа (15.16) приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum X_i, \\ m\ddot{y} = \sum Y_i, \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{iz}. \end{cases} \quad (15.19)$$

Уравнения (15.19) являются дифференциальными уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

15.4. Уравнения Лагранжа 2-го рода для случая потенциальных сил

Запишем выражение для обобщенной силы, отнесенной к произвольной обобщенной координате q_j [3, с. 151]:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (15.20)$$

В случае потенциальных сил проекции силы \vec{F}_i на координатные оси равны

$$F_{ix} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (15.21)$$

Подставляя (15.21) в (15.20), получаем:

$$Q_j = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

или, поскольку $\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q_j}$:

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q_j}.$$

Записываем уравнение Лагранжа с учетом полученного выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial q_j} &= -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q_j}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial q_j} &= 0. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Так как *потенциальная энергия является функцией только обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей*, то $\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial \dot{q}_j} = 0$ и выражение в

первой скобке можно представить так: $\frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial \dot{q}_j}$.

Это равенство позволяет переписать (15.22) так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial q_j} = 0,$$

и уравнение Лагранжа для потенциальных сил (для консервативных систем) приобретает изящный вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (15.23)$$

где $L = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}$.

Функция L , равная разности кинетической и потенциальной энергии системы, носит название лагранжевой функции.

Лекция 16. Принцип Даламбера. Общее уравнение динамики

Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Метод кинетостатики. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду. Общее уравнение динамики.

Принцип Даламбера является теоретической основой метода кинетостатики, т.е. приема, позволяющего уравнениям движения придать вид уравнений статики. Этот метод Даламбер изложил в труде «Трактат о динамике» (1743). Принцип еще раньше был сформулирован и применялся Я. Германом и Л. Эйлером, работавшими в Петербургской академии наук, и получил поэтому название «Петербургского принципа». Принципом Германа – Эйлера - Даламбера называют общий метод, при помощи которого уравнения динамики по форме придается вид уравнений статики. По установившейся традиции будем называть этот принцип механики принципом Даламбера. [2, с. 362]

16.1. Принцип Даламбера

16.1.1. Сила инерции материальной точки

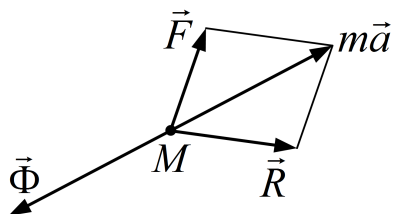


Рис. 16.1

Пусть на движущуюся материальную точку M массой m действуют заданные силы и силы реакций (рис. 16.1) [2, с. 362; 3, с. 192]. Под действием этих сил точка получает ускорение, определяемое из второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

где \vec{F} – равнодействующая заданных сил;

\vec{R} – равнодействующая сил реакций.

Перенесем все члены уравнения в одну сторону от знака равенства:

$$\vec{F} + \vec{R} - m\vec{a} = 0.$$

Величина $(-m\vec{a})$ имеет размерность силы и названа *силой инерции*.

Сила инерции материальной точки – сила, равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную в сторону, противоположную ускорению:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \quad \Phi = ma. \quad (16.1)$$

Силу $\vec{\Phi}$ называют также *даламберовой силой инерции*.

Очевидно, сила $\vec{\Phi}$ равна и противоположна равнодействующей сил, приложенных к точке. Проекции силы инерции $\vec{\Phi}$ на координатные оси определяются следующими формулами:

а) на декартовы оси координат

$$\Phi_x = -m\ddot{x}, \quad \Phi_y = -m\ddot{y}, \quad \Phi_z = -m\ddot{z}; \quad (16.2)$$

б) на естественные оси, связанные с траекторией точки,

$$\Phi_\tau = -m\dot{v}_\tau = -m\ddot{s}, \quad \Phi_n = -m\frac{v^2}{\rho}, \quad \Phi_b = 0.$$

Составляющие силы инерции $\vec{\Phi}$ вдоль естественных осей называют *касательной силой инерции* и *нормальной (центробежной) силой инерции*.

Даламберова сила инерции не является физической силой, не оказывает никакого реального воздействия на материальную точку. Она условно прикладывается к материальной точке в направлении против ускорения.

16.1.2. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы

Принцип Даламбера для материальной точки: *если к движущейся материальной точке кроме действующих на нее активных сил и реакций связей добавить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и для нее можно составить уравнения статики.*

Действительно, с учетом (16.2) уравнение (16.1) приобретает следующий вид:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Для механической системы, состоящей из n материальных точек, принцип Даламбера записывается в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{F}_n + \vec{R}_n + \vec{\Phi}_n = 0 \end{cases} \quad (16.3)$$

и формулируется следующим образом: *при движении механической системы в любой момент времени система сил, состоящая из заданных сил, реакций связей и сил инерции является уравновешенной, т.е. к ней можно применять все уравнения статики:*

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0$$

или в скалярной форме

$$\sum X + R_x + \Phi_x = 0, \quad \sum Y + R_y + \Phi_y = 0, \quad \sum Z + R_z + \Phi_z = 0.$$

Важно помнить, что эти уравнения только по форме похожи на уравнения равновесия. В действительности они являются уравнениями движения.

16.1.3. Метод кинетостатики

Как известно из статики, если система сил уравновешена, то ее главный вектор и главный момент относительно произвольного центра O равны нулю. [3, с. 194]

Это позволяет заменить n векторных уравнений (16.3) двумя векторными уравнениями:

$$\vec{F}^{\Gamma\Gamma} + \vec{R}^{\Gamma\Gamma} + \vec{\Phi}^{\Gamma\Gamma} = 0, \quad (16.4)$$

$$\vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}(\vec{F}) + \vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}(\vec{R}) + \vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}(\vec{\Phi}) = 0, \quad (16.5)$$

где $\vec{F}^{\Gamma\Gamma} = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{R}^{\Gamma\Gamma} = \sum \vec{R}_i, \quad \vec{\Phi}^{\Gamma\Gamma} = \sum \vec{\Phi}_i;$
 $\vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}(\vec{F}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i), \quad \vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}(\vec{R}) = \sum \vec{M}_O(\vec{R}_i), \quad \vec{M}_O^{\Gamma\Gamma}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{M}_O(\vec{\Phi}).$

Двум векторным уравнениям (16.4) и (16.5) соответствуют шесть скалярных уравнений в проекциях на оси координат.

Векторные уравнения (16.4) и (16.5) составляют основу *метода кинетостатики*, позволяющего решать задачи динамики с помощью уравнений статики.

Запишем выражение *главного вектора сил инерции*:

$$\vec{\Phi}^{\Gamma\Gamma} = \sum \vec{\Phi}_i = -\sum m_i \vec{a}_i.$$

Правую часть этого выражения можно преобразовать, используя формулу (11.1) для *радиуса-вектора центра масс системы*:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m – масса механической системы.

Дифференцируя это равенство дважды по времени, получаем:

$$\vec{a}_C = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m},$$

откуда

$$\sum m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_C,$$

следовательно, *главный вектор сил инерции* равен

$$\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -m \vec{a}_C.$$

Полученная формула справедлива для любого вида механической системы и для любого вида ее движения.

Главный момент сил инерции определяется формулой:

$$\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{M}_O(\vec{\Phi}_i) = \sum \vec{r}_i \times (-m_i \vec{a}_i) = -\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i.$$

Из приведенной формулы следует, что, в отличие от главного вектора, главный момент сил инерции зависит от вида механической системы, от характера ее движения и от положения центра, относительно которого он подсчитывается.

16.1.4. Приведение сил инерции к простейшему виду

Рассмотрим операцию приведения системы сил инерции к центру для частных случаев движения твердого тела. [3, с. 195]

1. Поступательное движение. Тело весом $P = mg$ движется поступательно с ускорением \vec{a} (рис. 16.2). Приведем силы инерции к центру C тяжести тела. Главный вектор сил инерции равен

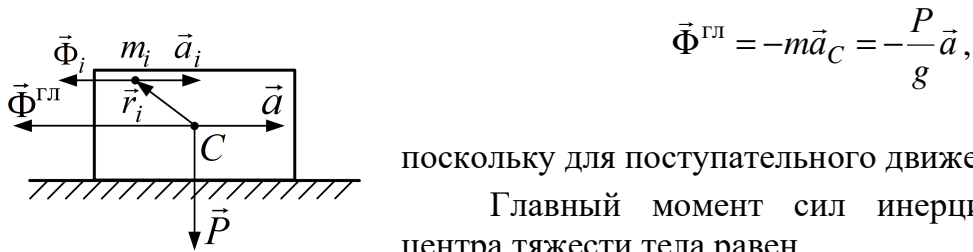


Рис. 16.2

$$\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -m \vec{a}_C = -\frac{P}{g} \vec{a},$$

поскольку для поступательного движения $\vec{a}_C = \vec{a}$.

Главный момент сил инерции относительно центра тяжести тела равен

$$\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = -\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a} = -(\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{a}.$$

Выражение, стоящее в скобках, равно нулю (т.к. радиус-вектор центра масс равен нулю), следовательно,

$$\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = 0.$$

Таким образом, при поступательном движении твердого тела система сил инерции приводится к равнодействующей, равной произведению массы тела на

его ускорение, направленной против этого ускорения и приложенной в центре масс: $\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -m\vec{a}_C$.

2. Вращательное движение. Пусть тело массы m имеет плоскость симметрии и вращается вокруг неподвижной оси Oz , перпендикулярной этой плоскости.

Приведем силы инерции к точке O , лежащей в плоскости симметрии тела. Главный вектор сил инерции равен

$$\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -m\vec{a}_C = -m(\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau).$$

Чтобы найти главный момент относительно оси Oz , приложим к каждой точке массой m_i силу инерции, которую разложим на две составляющие: нормальную $\vec{\Phi}_i^n$ и касательную $\vec{\Phi}_i^\tau$, направленные противоположно составляющим ускорения точки (рис. 16.3). Нормальная и касательная силы инерции, соответственно, равны:

$$\begin{aligned}\Phi_i^n &= m_i a_i^n = m_i \omega^2 r_i, \\ \Phi_i^\tau &= m_i a_i^\tau = m_i \varepsilon r_i,\end{aligned}$$

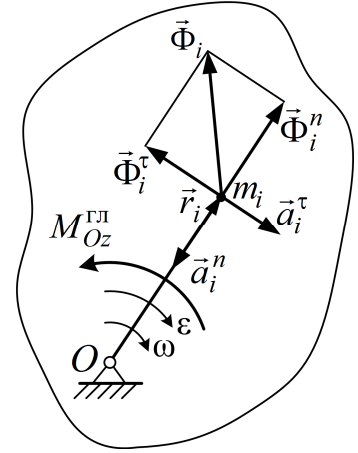


Рис. 16.3

где r_i – расстояние от точки m_i до оси вращения.

Главный момент нормальных составляющих сил инерции относительно оси Oz равен нулю, поскольку силы $\vec{\Phi}_i^n$ пересекают ось вращения. Следовательно, главный момент создается только касательными силами инерции:

$$M_{Oz}^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum r_i \Phi_i^\tau = -\sum m_i \varepsilon r_i^2 = -J_{Oz} \varepsilon.$$

Знак минус указывает на то, что направление главного момента сил инерции противоположно угловому ускорению тела.

Таким образом, при вращательном движении тела вокруг оси Oz силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту сил инерции.

Замечание. В случае, если ось вращения проходит через центр масс тела, то главный вектор сил инерции будет равен нулю и поэтому силы инерции приводятся только к главному моменту.

3. Плоскопараллельное движение. Пусть тело массы m имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости. В плоскости симметрии выберем координатные оси Ox и Oy так, как показано на рис. 16.4. Приведем все силы инерции к центру C тяжести тела.

Главный вектор сил инерции равен

$$\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -m\vec{a}_C,$$

где \vec{a}_C – ускорение центра тяжести.

Переходим к вычислению главного момента сил инерции. Произвольная точка i тела имеет ускорение, равное геометрической сумме трех ускорений: полюсного \vec{a}_C , центростремительного $\vec{a}^{\text{ц}}$ и вращательного $\vec{a}^{\text{вр}}$, т.е.

$$\begin{aligned}\vec{a}_i &= \vec{a}_C + \vec{a}^{\text{ц}} + \vec{a}^{\text{вр}}, \\ \vec{a}^{\text{ц}} &= -\omega^2 \vec{r}_i, \quad \vec{a}^{\text{вр}} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_i,\end{aligned}$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор, идущий из полюса C в точку i .

Прикладываем к i -ой точке силы инерции $\vec{\Phi}_C$, $\vec{\Phi}^{\text{ц}}$, $\vec{\Phi}^{\text{вр}}$ по направлениям, противоположным составляющим ускорения, и подсчитываем главный момент этих сил относительно центра тяжести тела:

$$\begin{aligned}\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) &= \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{\Phi}_C + \vec{\Phi}^{\text{ц}} + \vec{\Phi}^{\text{вр}}) = \sum \vec{r}_i \times m_i (-\vec{a}_C + \omega^2 \vec{r}_i - \vec{\epsilon} \times \vec{r}_i) = \\ &= -(\sum m_i \vec{r}) \times \vec{a}_C + (\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i) \omega^2 - (\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{\epsilon} \times \vec{r}_i).\end{aligned}\quad (16.6)$$

Первое слагаемое (16.6) равно нулю, поскольку $\sum m_i \vec{r}_i = 0$.

Второе слагаемое (16.6) равно нулю, т.к. $\vec{r}_i \times \vec{r}_i = 0$.

Преобразуем третье слагаемое (16.6):

$$\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{\epsilon} \times \vec{r}_i = \vec{\epsilon} (\sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \sum m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\epsilon}),$$

где $\vec{\epsilon} \sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \sum m_i (\vec{r}_i)^2 = J_{Cz} \vec{\epsilon}$;
 $\sum m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\epsilon}) = 0$, поскольку $\vec{r}_i \perp \vec{\epsilon}$.

Окончательно имеем:

$$\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = -J_{Cz} \vec{\epsilon}.$$

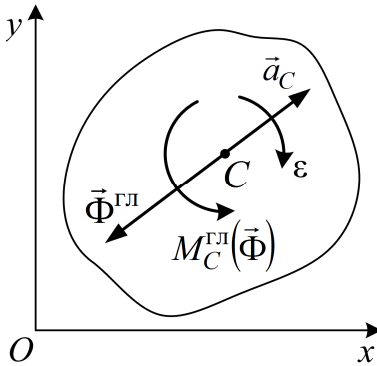


Рис. 16.4

Таким образом, при плоскопараллельном движении твердого тела силы инерции приводятся к одной силе и к одному моменту (рис. 16.4). Сила равна главному вектору $\vec{\Phi}^{\text{гл}}$, приложена в точке C и направлена против ускорения \vec{a}_C . Момент действует в плоскости симметрии тела, равен $J_{Cz} \epsilon$ и направлен против углового ускорения тела.

16.2. Общее уравнение динамики

Общее уравнение динамики представляет собой объединение двух принципов: принципа Даламбера и принципа возможных перемещений Лагранжа. [3, с. 206]

Рассмотрим движущуюся механическую систему с идеальными стационарными связями, состоящую из n материальных точек. [2, с. 412]

Выделим точку i системы и покажем силы, действующие на нее. Пусть \vec{F}_i^e – равнодействующая активных сил; \vec{R}_i – равнодействующая реакций идеальных связей. Добавим к точке силу инерции $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$.

По принципу Даламбера полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять принцип возможных перемещений. Для рассматриваемой точки получаем:

$$\vec{F}_i^e \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \delta \vec{r}_i + \vec{\Phi}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

Суммируя полученные выражения для всех точек системы и учитывая, что для идеальных связей $\sum_i \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$, получим

$$\sum_i \vec{F}_i^e \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{\Phi}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad (16.7)$$

или

$$\sum_i \delta A_i(\vec{F}^e) + \sum_i \delta A_i(\vec{\Phi}) = 0. \quad (16.8)$$

Полученное уравнение называют **общим уравнением динамики** системы.

Общее уравнение динамики формулируется так: *при движении несвободной механической системы, на которую наложены идеальные связи, в любой момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении из рассматриваемого положения равна нулю.*

Следует отметить, что в уравнение (16.8) не входят реакции идеальных связей. Уравнение (16.8) называют общим потому, что из него как следствие можно получить все общие теоремы динамики, а также дифференциальные уравнения движения точки и точек механической системы.

Общее уравнение динамики для системы с одной степенью свободы описывает движение механической системы и может использоваться для определения ускорений. [3, с. 207]

Если механическая система имеет несколько степеней свободы, то для нее составляется столько общих уравнений динамики, сколько имеется независимых возможных перемещений. Силы инерции, входящие в эти уравнения, определяются в абсолютном движении системы (а не на отдельных возможных перемещениях).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная		Механическая система	5
производная	76	Момент	
траектория движения точки	74	пары сил	9
Абсолютно твердое тело	5	пары сил алгебраический	9
Аксиома отвердевания	30	силы относительно оси	9
Вектор		силы относительно точки алгебраический	7
углового ускорения твердого тела	52	силы относительно точки векторный	8
угловой скорости твердого тела	51	трения качения	22
Векторная формула для определения		МЦС См. Мгновенный центр	
скоростей точек плоской фигуры	61	скоростей	
ускорений точек плоской фигуры	65	Ось	
Вращательная составляющая		вращения	50
скорости точки плоской фигуры	61	вращения мгновенная	68
Главный вектор системы сил	12	конечного поворота	68
Главный момент системы сил	13	Пара сил	9
Годограф вектора	43	Параметрические уравнения	
Движение		траектории	43
по инерции	10	Плечо силы	8
тела вращательное	50	Правило Жуковского	80
тела плоское	57	Приведение системы сил к центру	35
тела плоскопараллельное	57	Принцип	
тела поступательное	49	независимости действия сил	11
тела сферическое	66	освобождаемости от связей	16
точки абсолютное	72	Проекция силы	
точки относительное	72	на ось	6
точки переносное	72, 73	на плоскость	7
точки сложное	72	Равнодействующая системы сил	14
Динамический винт	36	Равномерное вращение твердого тела	53
Закон		Равнопеременное вращение твердого	
Амонта – Кулона	20	тела	53
инерции	10	Радиус-вектор	
равенства действия и противодействия	11	центра тяжести тела	40
Инертность	7	Распределенная нагрузка	19
Инерциальная система отсчета	11	Реакция	
Кинематические уравнения движения		связи	16
точки	43	Реакция опорной поверхности	20
Конус трения	21	Самозаклинивание	22
Коэффициент трения		Самоторможение	22
качения	22	Связь 16	
скольжения	21	Сила 6	
Линия действия силы	6	реакции	29
Локальная производная	76	трения скольжения	20
Масса	7	Силы	
Материальная точка	5	внешние	14
Мгновенно поступательное движение		внутренние	14
63		Система	
Мгновенный		отсчета	6
центр вращения	60		
центр скоростей	61		

сил	6	Углы Эйлера	66
Скорость точки	44	Угол	
абсолютная	77	нутации	66
относительная	77	прецессии	66
переносная	77	собственного вращения	66
Способы задания движения точки		Уравнение	
векторный	43	вращательного движения твердого тела	50
естественный	44	Уравнения	
координатный	43	плоскопараллельного движения твердого	
Статически		тела	58
неопределимая система	30	поступательного движения твердого тела	
определимая система	30	50	
Степень статической		сферического движения твердого тела	67
неопределимости	30	Уравновешенная система сил	6
Теорема		Ускорение точки	46
Кориолиса	80	абсолютное	79
о векторе-моменте пары сил	10	вращательное	64
о проекциях скоростей двух точек		касательное	48
плоской фигуры	64	кориолисово	80
о равенстве скорости и ускорения точек		нормальное	48
тела при поступательном движении	49	относительное	78
о сложении скоростей точки	78	переносное	78
о трех силах	26	центростремительное	65
о центре конечного вращения	60	Формула Эйлера	55
об изменении главного момента при		Центр	
переходе к новому центру	33	конечного поворота	60
об оси конечного поворота	67	системы параллельных сил	38
об эквивалентности двух систем сил	34	тяжести тела	40
Теоретическая механика	5	Эквивалентные системы сил	13
Угловая скорость	51		
Угловое ускорение	51		

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков А.Э., Чеканина Е.А. Основы теоретической механики: учеб. пособие / А.Э. Волков, Е.А. Чеканина. – Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2022. – 192 с.: ил.
2. Денисов Ю.В. Теоретическая механика: учебник / Ю.В. Денисов, Н.А. Клиньских. – Екатеринбург: УрФУ, 2013. – 474 с.
3. Динамика: учебное пособие / С.А. Еленев, В.Г. Новиков, А.И. Огурцов, Г.И. Шевелева. – М.: ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2010.
4. Добронравов В.В. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для машиностроит. спец. вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1983. – 575 с., ил.
5. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Кинематика: учеб. пособие. – М.: ИЦ МГТУ «Станкин», 2002. – 129 с.
6. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Статика. Учебное пособие. Издание второе, переработанное. – М.: ИЦ ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2006. – 124 с.
7. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Теоретическая механика: Статика. Кинематика. Динамика. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 176 с.
8. Ньютон И. Математические начала натуральной философии; пер. с латинского и коммент. А.Н. Крылова; под ред. и с предисл. Л.С. Полака. – Москва: Наука, 1989.
9. Теоретическая механика. Динамика. Практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1. Динамика материальной точки / В.А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А.В. Чигарева и доц. Н.И. Горбача. – Минск: Новое знание; М.: ЦУПЛ, 2010. – 528 с.
10. Эрдеди А.А. Теоретическая механика: учебное пособие / А.А. Эрдеди, Н.А. Эрдеди. – 2-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2012. – 208 с. – (Для бакалавров).